Correction du devoir surveillé 7.

Exercice 1

1°)

$$\begin{aligned} u \text{ est un vecteur propre associé à la valeur propre } \lambda &\iff f(u) - \lambda u = 0 \\ &\iff (f - \lambda\,\mathrm{id})(u) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{u \text{ est un vecteur propre associé à la valeur propre } \lambda \iff u \text{ est dans } \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id})}.$$

2°) $\mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(f-\mu\,\mathrm{id})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ donc $\{0\} \subset \mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(f-\mu\,\mathrm{id})$.
Soit $u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(f-\mu\,\mathrm{id})$.
On a donc $f(u) = \lambda u$ et $f(u) = \mu u$.
D'où $\lambda u = \mu u$ puis $(\lambda - \mu)u = 0$. Comme $\lambda - \mu \neq 0$, on en tire que $u = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(f-\mu\,\mathrm{id}) \subset \{0\}$ et par double inclusion, $\boxed{\mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(f-\mu\,\mathrm{id}) = \{0\}}$.

3°)

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } f &\iff \exists\, u \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ u \in \mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id}) \quad \text{d'après la question 1} \\ &\iff \mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0\} \\ &\iff f-\lambda\,\mathrm{id} \text{ non injectif} \\ &\iff f-\lambda\,\mathrm{id} \text{ non bijectif} \\ &\qquad \text{car } f-\lambda\,\mathrm{id} \text{ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie} \end{aligned}$$

$\boxed{\lambda \text{ valeur propre de } f \iff \det(f-\lambda\,\mathrm{id}) = 0}$

4°) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La matrice de $f - \lambda\,\mathrm{id}$ dans la base $\mathcal{C}$ est $D - \lambda I_n$ donc :

$$\det(f-\lambda\,\mathrm{id}) = \det(D - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda).$$

D'après la question 3 : λ valeur propre de $f \iff \det(f-\lambda\,\mathrm{id}) = 0 \iff \exists\, k \in \{1, \dots, n\},\ \lambda = \lambda_k$.
Ainsi, $\boxed{\text{les coefficients diagonaux de } D \text{ sont exactement les valeurs propres de } f}$.

5°) Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$: H_k : $f^k(u) = \lambda^k u$.

- $f^0(u) = \mathrm{id}(u) = u = \lambda^0 u$, donc H_0 est vraie.
- Supposons H_k vraie pour un $k \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned} f^{k+1}(u) = f\left(f^k(u)\right) &= f(\lambda^k u) \text{ par } H_k \\ &= \lambda^k f(u) \text{ par linéarité de } f \\ &= \lambda^k \lambda u = \lambda^{k+1} u \end{aligned}$$

  Ainsi H_{k+1} est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ f^k(u) = \lambda^k u}$.

6°) Supposons que λ soit valeur propre de p, notons u un vecteur propre associé.
D'après la question précédente, $p^2(u) = \lambda^2 u$. Or p est une projection donc $p^2(u) = p(u) = \lambda u$.
On en tire $\lambda u = \lambda^2 u$ i.e. $(\lambda - \lambda^2)u = 0$, et comme u est non nul par hypothèse (définition d'un vecteur propre), $\lambda - \lambda^2 = 0$ i.e. $\lambda(1-\lambda) = 0$. Ainsi, $\boxed{\text{les seules valeurs propres éventuelles de } p \text{ sont 0 et 1}}$.

7°) Comme F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$, la réunion d'une base $(f_1, \dots, f_r)$ de F et d'une base $(g_1, \dots, g_q)$ de G (ces bases existent car ils ne sont pas réduits à $\{0\}$) forme une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$.
Comme p est la projection sur F parallèlement à G, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $p(f_i) = f_i$, et pour tout $j \in \{1, \dots, q\}$, $p(g_j) = 0$.
Donc la matrice de p dans la base $\mathcal{C}$ est diagonale, avec r coefficients 1 puis q coefficients 0 sur la diagonale :

$$\underset{\mathcal{C}}{\mathrm{mat}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\boxed{p \text{ est diagonalisable}}$.

8°) $A - \lambda I_3 = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f - \lambda\,\mathrm{id})$ donc :

$$\begin{aligned}
\det(f - \lambda\,\mathrm{id}) = \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -3 \\ 3 & 1-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & -5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & -2-\lambda & -2-\lambda \\ -2-\lambda & -2-\lambda & -5-\lambda \end{vmatrix} \qquad C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \text{ et } C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\
&= (-2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} \qquad \text{par linéarité par rapport à } C_1 \text{ et à } C_2 \\
&= (2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= (2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \qquad \text{par développement par rapport à } C_1 \\
&= (2+\lambda)^2\,(-2-\lambda+3) = (2+\lambda)^2(1-\lambda)
\end{aligned}$$

D'après la question 3, on obtient que $\boxed{\text{les valeurs propres de } f \text{ sont } -2 \text{ et } 1}$.

9°) $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f - \mathrm{id}) = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, donc, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) &\iff (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 3y - 3z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \\ 3x + 3y - 6z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases} \quad \text{(car dans le système précédent, } L_3 = L_1 + L_2\text{)}
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \{(z, z, z) \;/\; z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$. La famille $((1, 1, 1))$ est donc génératrice de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, et elle est libre car composée d'un vecteur non nul. $\boxed{((1, 1, 1)) \text{ est donc une base de } \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})}$.

De même, $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f + 2\,\mathrm{id}) = A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, donc, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{id}) \iff 3x + 3y - 3z = 0 \iff z = x + y$$

Donc $\text{Ker}(f - \text{id}) = \{(x, y, x + y) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$. La famille $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est donc génératrice de $\text{Ker}(f - \text{id})$, et elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. $\boxed{((1, 0, 1), (0, 1, 1)) \text{ est donc une base de } \text{Ker}(f + 2\,\text{id})}$.

10°) Ainsi, $\dim(\text{Ker}(f - \text{id})) = 1$ et $\dim(\text{Ker}(f + 2\,\text{id})) = 2$.
Donc $\dim(\text{Ker}(f - \text{id})) + \dim(\text{Ker}(f + 2\,\text{id})) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.
Par ailleurs, d'après la question 2, $\text{Ker}(f - \text{id}) \cap \text{Ker}(f + 2\,\text{id}) = \{0\}$.
On en déduit que $\boxed{\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Ker}(f + 2\,\text{id}).}$

11°) Posons $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$. $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car c'est la réunion de bases de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Comme $e_1 \in \text{Ker}(f - \text{id})$, on sait que $f(e_1) = e_1$. De même, $f(e_2) = -2e_2$ et $f(e_3) = -2e_3$, d'où :

$$\boxed{\underset{\mathcal{C}}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

12°) a) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, supposons que $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 = 0$.
Si on avait $\alpha \neq 0$, on pourrait écrire $\varepsilon_1 = -\dfrac{\beta}{\alpha}\varepsilon_2$. Comme $\varepsilon_1 \in \text{Ker}(f - \lambda_1\,\text{id})$ et $\varepsilon_2 \in \text{Ker}(f - \lambda_2\,\text{id})$, on obtient que le vecteur ε_1 est dans $\text{Ker}(f - \lambda_1\,\text{id}) \cap \text{Ker}(f - \lambda_2\,\text{id})$, or d'après la question 2, c'est $\{0\}$. Contradiction : par définition d'un vecteur propre, ε_1 est non nul.
Donc $\alpha = 0$, et donc $\beta\varepsilon_2 = 0$. Comme $\varepsilon_2 \neq 0$, on en tire $\beta = 0$.
On a bien montré que $\boxed{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \text{ est libre.}}$

b) Supposons par l'absurde qu'il existe des réels α et β tels que $\varepsilon_3 = \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2$.
Appliquons f à cette égalité : comme f est linéaire et que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $f(\varepsilon_i) = \lambda_i\varepsilon_i$, on obtient $\lambda_3\varepsilon_3 = \alpha\lambda_1\varepsilon_1 + \beta\lambda_2\varepsilon_2$.
En remplaçant ε_3 par son expression en fonction de ε_1 et ε_2, on en tire :

$$\lambda_3\alpha\varepsilon_1 + \lambda_3\beta\varepsilon_2 = \alpha\lambda_1\varepsilon_1 + \beta\lambda_2\varepsilon_2 \text{ d'où } (\lambda_3 - \lambda_1)\alpha\varepsilon_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\beta\varepsilon_2 = 0.$$

Mais $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre donc ceci implique que $(\lambda_3 - \lambda_1)\alpha = 0$ et $(\lambda_3 - \lambda_2)\beta = 0$, d'où $\alpha = \beta = 0$ puisque les λ_i sont deux à deux distinctes.
D'où $\varepsilon_3 = 0$: absurde car c'est un vecteur propre.
Ainsi, ε_3 n'est pas combinaison linéaire de ε_1 et ε_2.
Comme $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre, on en tire que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre également.
Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, $\boxed{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ est même une base de } \mathbb{R}^3}$.

13°) Notons $\mathcal{C}$ la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
Comme pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, $f(\varepsilon_i) = \lambda_i\varepsilon_i$, $\underset{\mathcal{C}}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

14°) $f^3 = -f$ donc $\det(f^3) = \det(-f) = (-1)^3\det(f)$ (car $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$).
Par ailleurs, $\det(f^3) = \det(f)^3$. Ainsi, $\det(f)^3 = -\det(f)$, donc $\det(f)\left(\det(f)^2 + 1\right) = 0$.
Comme $\det(f)$ est un réel, $\det(f)^2 + 1 \neq 0$ donc $\boxed{\det(f) = 0}$.
On peut en déduire que $\boxed{f \text{ n'est pas bijective}}$, ou bien (c'est équivalent) que $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f}$.

15°) Supposons par l'absurde que f soit diagonalisable. Notons $\mathcal{C}$ une base telle que $D = \underset{\mathcal{C}}{\text{mat}}(f)$ soit diagonale,
notons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels.

$\underset{\mathcal{C}}{\text{mat}}(f^3) = D^3$ et $f^3 = -f$ donc $D^3 = -D$, i.e. $\begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$.
On en tire que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\lambda_i^3 = -\lambda_i$, donc $\lambda_i(\lambda_i^2 + 1) = 0$. A nouveau, comme il s'agit de réels, on obtient que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Donc D est la matrice nulle, i.e. f est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$: contradiction avec l'énoncé.
Ainsi, $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

16°) a) D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$.

Comme $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, $\{0\} \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

Soit $v \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Alors $f(v) = 0$, et il existe un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $v = f(w)$. En appliquant f à cette égalité, on obtient $0 = f^2(w)$. Appliquons f une deuxième fois : comme f est linéaire, on obtient $0 = f^3(w)$. Mais $f^3 = -f$ donc $0 = -f(w)$, i.e. $v = f(w) = 0$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0\}$, et même $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ par double inclusion.

Conclusion : $\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)}$.

b) Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, supposons que $\alpha f(u) + \beta f^2(u) = 0$: $(*)$.

Appliquons f à cette égalité : comme f est linéaire, on obtient $\alpha f^2(u) + \beta f^3(u) = 0$.

De plus $f^3 = -f$ d'où $-\beta f(u) + \alpha f^2(u) = 0$: $(**)$.

Multiplions $(*)$ par α et $(**)$ par $-\beta$, et additionnons : il reste $(\alpha^2 + \beta^2) f(u) = 0$.

Comme $f(u) \neq 0$, on en tire $\alpha^2 + \beta^2 = 0$.

Or α et β sont des réels, donc α^2 et β^2 sont deux nombres positifs, d'où $\alpha^2 = \beta^2 = 0$ puis $\alpha = \beta = 0$.

On a bien montré que $\boxed{(f(u), f^2(u)) \text{ est libre}}$.

c) $(f(u), f^2(u))$ est une famille libre de deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 2$.

Si on avait $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$, on aurait $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ (puisque $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui est lui-même de dimension 3). Mais alors f serait surjective et même bijective puisque c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension finie : contradiction avec la question 14.

Donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$, et puisque $(f(u), f^2(u))$ est une famille libre de 2 vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$,

$\boxed{\text{c'est une base de } \mathrm{Im}(f)}$.

d) On sait que $(f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$, et donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ par le théorème du rang. Notons (e_1) une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Notons également $e_2 = f(u)$ et $e_3 = f^2(u)$.

Comme $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ la réunion (e_1, e_2, e_3) de ces deux bases forme une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

On sait que $e_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(e_1) = 0$.

$f(e_2) = f(f(u)) = f^2(u) = e_3$; et $f(e_3) = f(f^2(u)) = f^3(u) = -f(u) = -e_2$.

On a donc bien $\boxed{\underset{\mathcal{C}}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

<u>Exercice 2</u>

1°) a) Donnons une méthode permettant d'obtenir une et une seule fois un code de E_1 :

— Choix des quatre chiffres, autrement dit choix d'une 4-liste de l'ensemble des 9 chiffres $\{1, 2, \ldots, 9\}$: 9^4 possibilités.

— Choix des deux lettres, autrement dit choix d'un 2-arrangement de l'ensemble des 3 lettres $\{A, B, C\}$: 3×2 possibilités.

Donc $\boxed{\mathrm{card}\,(E_1) = 9^4 \times 3 \times 2}$.

b) Notons U l'ensemble des codes où le chiffre 1 est utilisé au moins une fois.

$\overline{U}$ est alors l'ensemble des codes de E_1 où le chiffre 1 n'apparaît pas. Un code de $\overline{U}$ s'obtient comme un code de E_1 sauf qu'on choisit les chiffres dans l'ensemble $\{2, 3, \ldots, 9\}$ qui n'a que 8 éléments, donc $\mathrm{card}(\overline{U}) = 8^4 \times 3 \times 2$.

On a $\mathrm{card}(U) = \mathrm{card}(E_1) - \mathrm{card}(\overline{U})$, donc $\boxed{\mathrm{card}(U) = 9^4 \times 3 \times 2 - 8^4 \times 3 \times 2}$.

c) Si trois chiffres sont utilisés alors un de ces trois chiffres apparaît exactement deux fois et les deux autres, exactement une fois.

Donnons une méthode permettant d'obtenir une et une seule fois un code convenable :

— Choix du chiffre utilisé deux fois : 9 possibilités.

— Choix des deux positions occupées par ce chiffre parmi les 4 emplacements possibles : cela revient à choisir une 2-combinaison d'un ensemble à 4 éléments, $\binom{4}{2}$ possibilités.

— Choix de deux autres chiffres sur les deux emplacements restants : cela revient à choisir un 2-arrangement de l'ensemble des 8 chiffres restants, $\dfrac{8!}{(8-2)!} = 8 \times 7$ possibilités.

— Choix des deux lettres : 3×2 possibilités.

Ainsi, $\boxed{\text{il y a } 9 \times \binom{4}{2} \times 8 \times 7 \times 3 \times 2 \text{ codes où 3 chiffres exactement sont utilisés}}$.

2°) a) Donnons une méthode permettant d'obtenir une et une seule fois un code de E_2 :

— Choix des trois chiffres, qui forment un 3-arrangement de $\{1, 2, \ldots, 9\}$: $\dfrac{9!}{(9-3)!} = \dfrac{9!}{6!}$ possibilités.

— Choix des trois lettres, qui forment une 3-liste de l'ensemble $\{A, B, C\}$: 3^3 possibilités.

Donc $\boxed{\mathrm{card}\,(E_2) = \dfrac{9!}{6!} \times 3^3}$.

b) L'ensemble M des codes recherchés est la réunion disjointe de I et P, où I est l'ensemble des codes où les chiffres sont tous impairs, et P l'ensemble des codes où les chiffres sont tous pairs.
On aura donc $\mathrm{card}(M) = \mathrm{card}(I) + \mathrm{card}(P)$.
Un code de I est formé d'un 3-arrangement de $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ et d'une 3-liste de $\{A, B, C\}$, donc $\mathrm{card}(I) = \dfrac{5!}{(5-3)!} \times 3^3 = \dfrac{5!}{2!} \times 3^3$.

De même, comme il y a 4 chiffres pairs sur le digicode, $\mathrm{card}(P) = \dfrac{4!}{(4-3)!} \times 3^3 = 4! \times 3^3$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{card}(M) = \dfrac{5!}{2!} \times 3^3 + 4! \times 3^3}$.

c) Donnons une méthode permettant d'obtenir une et une seule fois un code convenable :

— Choix de 3 chiffres parmi les 9 disponibles, autrement dit choix d'une 3-combinaison de l'ensemble des chiffres : $\binom{9}{3}$ possibilités.

— On ordonne ces chiffres dans l'ordre strictement décroissant : 1 possibilité.

— Choix des 3 lettres : 3^3 possibilités.

Donc $\boxed{\text{il y a } \binom{9}{3} \times 3^3 \text{ codes où les quatre chiffres sont dans l'ordre décroissant}}$.

3°) a) Notons E l'ensemble des codes possibles. Le nombre k de chiffres utilisés peut varier de 1 à 5, puisqu'on veut au moins une lettre et au moins un chiffre.

En notant C_k le nombre de codes avec exactement k chiffres, on a donc : $E = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{5} C_k$.

Les C_k sont deux à deux disjoints donc $\mathrm{card}(E) = \displaystyle\sum_{k=1}^{5} \mathrm{card}(C_k)$.

Fixons $k \in \{1, \ldots, 5\}$, choisir un élément de C_k revient à choisir une k-liste de $\{1, \ldots, 9\}$ puis une $(6-k)$-liste de $\{A, B, C\}$, donc $\mathrm{card}(C_k) = 9^k \times 3^{6-k}$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{card}(E) = \displaystyle\sum_{k=1}^{5} 9^k \times 3^{6-k}}$.

b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{card}(E) &= \sum_{k=1}^{5} 3^6 \frac{9^k}{3^k} = 3^6 \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{9}{3}\right)^k = 3^7 \sum_{k=1}^{5} 3^{k-1} \\
&= 3^7 \sum_{i=0}^{4} 3^i \quad \text{(changement d'indice } i = k-1\text{)} \\
&= 3^7 \frac{1-3^5}{1-3} \quad \text{(car } 3 \neq 1\text{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{card}(E) = \frac{3^7(3^5-1)}{2}}$$

Exercice 3

1°) ★ Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. $f(P) = \dfrac{1}{2}\left[P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right]$. $f(P)$ est bien un polynôme.

$\deg(f(P)) \leq \max\left(\deg\left(P\left(\dfrac{X}{2}\right)\right), \deg\left(P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right)\right)$.

Or $\deg\left(P\left(\dfrac{X}{2}\right)\right) = \deg(P) \leq 2$ et $\deg\left(P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right) = \deg(P) \leq 2$.

Donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est bien à valeurs dans } \mathbb{R}_2[X]}$.

★ Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda P + Q) &= \frac{1}{2}\left[(\lambda P + Q)\left(\frac{X}{2}\right) + (\lambda P + Q)\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\lambda P\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X}{2}\right) + \lambda P\left(\frac{X+1}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \\
&= \lambda\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[Q\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \\
&= \lambda f(P) + f(Q)
\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{f \text{ est linéaire}}$.

2°) Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\varphi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$.

Donc, $\boxed{\varphi \text{ est linéaire}}$.

3°) $f(1) = 1$

$f(X) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{X}{2} + \dfrac{X+1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}(2X+1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}X$

$f(X^2) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{X^2}{4} + \dfrac{(X+1)^2}{4}\right) = \dfrac{1}{8}(2X^2 + 2X + 1) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4}X + \dfrac{1}{4}X^2$.

Ainsi, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

4°) A est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls donc A est inversible.

On en déduit que : $\boxed{f \text{ est bijective}}$.

5°) Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P) = 0 \\
&\iff P(1) = 0 \\
&\iff a + b + c = 0 \\
&\iff a = -b - c \\
&\iff P = -b - c + bX + cX^2
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{-b - c + bX + cX^2 / (b, c) \in \mathbb{R}^2\} = \{b(-1 + X) + c(-1 + X^2) / (b, c) \in \mathbb{R}^2\}$.

Ainsi, $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Vect}(-1 + X, -1 + X^2)$.

La famille $(-1 + X, -1 + X^2)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker}(\varphi)$. De plus, les 2 polynômes ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre.

Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (-1 + X, -1 + X^2) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(\varphi)}$.

On en déduit que $\boxed{\dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = 2}$.

Autre méthode :
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(\varphi) &\iff (X-1)|P \\ &\iff \exists\, Q \in \mathbb{R}_1[X],\ P = (X-1)Q \\ &\iff \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P = (X-1)(aX+b) \\ &\iff \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P = aX(X-1) + b(X-1) \end{aligned}$$

On en tire de façon similaire que $(X(X-1), X-1)$ est une base de $\operatorname{Ker}(\varphi)$ et que $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = 2$.

6°) $\operatorname{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$ donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective}}$.
$\operatorname{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$. Donc $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) \leq \dim(\mathbb{R})$ i.e. $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) \leq 1$.
Pour $P = X$, on a $P(1) = 1 \neq 0$ donc $\operatorname{Im}(\varphi) \neq \{0\}$. Ainsi, $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) \geq 1$.
On en déduit que $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = 1$ (*on aurait pu aussi utiliser le théorème du rang.*)
$\operatorname{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$ et $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R})$ donc $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est surjective}}$.

Autre méthode : Soit $y \in \mathbb{R}$. On pose $P = yX$. Alors $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\varphi(P) = y$.
Donc φ est surjective.

7°) La famille $\mathcal{B}'$ est une famille de polynômes non nuls, échelonnée en degrés donc $\mathcal{B}'$ est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$.
De plus, elle a 3 éléments et $3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ donc $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$.

8°) $f(P_1) = f(1) = \dfrac{1}{2}(1+1) = 1$ donc $f(P_1) = P_1$.
Comme A est la matrice de f dans la base canonique, calculer $f(P)$ où $P = a + bX + cX^2$ revient à calculer $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

- $P_2 = 1 - 2X$, donc on calcule : $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $f(P_2) = \dfrac{1}{2}P_2$.
- $P_3 = 1 - 6X + 6X^2$, donc on calcule : $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$. Donc $f(P_3) = \dfrac{1}{4}P_3$.

On en déduit que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est : $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$

9°) Par lecture des coordonnées des éléments de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, on obtient : $\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$

Remarque : comme Q est une matrice de passage, on sait que Q est inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow -\frac{L_2}{2} \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{6} \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Ainsi $\boxed{Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}}$.

10°) $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f)$, donc par une formule du changement de bases, $\underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{mat}}(f) = Q^{-1}AQ$, donc $A = QDQ^{-1}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, H_n : $A^n = QD^nQ^{-1}$.

★ H_0 est vraie car $QD^0Q^{-1} = QQ^{-1} = I_3 = A^0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= QD^nQ^{-1}QDQ^{-1} \\ &= QD^{n+1}Q^{-1} \end{aligned}$$

Donc H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = QD^nQ^{-1}$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{4^n} \\ 0 & -\frac{1}{2^{n-1}} & -\frac{6}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{6}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6\times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}}$.

11°) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $f^n(P)$ revient à calculer $A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6\times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

en notant :

$$\boxed{\begin{cases} a_n = a + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) b + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{6 \times 4^n}\right) c \\ b_n = \dfrac{b}{2^n} + \left(\dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{4^n}\right) c \\ c_n = \dfrac{c}{4^n} \end{cases}}.$$

On a alors, $\boxed{f^n(P) = a_n + b_nX + c_nX^2}$.

12°) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$\varphi(f^n(P)) = \varphi(a_n + b_nX + c_nX^2) = a_n + b_n + c_n$.

$\varphi(f^n(P)) = a + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) b + \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{6 \times 4^n}\right) c$.

Comme $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si $|q| < 1$, on en déduit que : $\varphi(f^n(P)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3}$.

D'autre part, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (a + bt + ct^2)\,\mathrm{d}t = \left[at + b\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$.

Donc, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t}$.