Correction du devoir surveillé 6.

Exercice 1

1°) Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\lambda A + B) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i} + b_{i,i}) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \\ &= \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Tr est linéaire}}$.

Comme Tr est à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est une $\boxed{\text{forme linéaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

2°) Soient $(M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f(\lambda M + N) &= \mathrm{Tr}(A).\left(\lambda.M + N\right) - \mathrm{Tr}(\lambda.M + N).A \\ &= \mathrm{Tr}(A)\lambda.M + \mathrm{Tr}(A).N - \left(\lambda \mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(N)\right).A \quad \text{car Tr linéaire et par propriétés de + et .} \\ &= \lambda.\left(\mathrm{Tr}(A).M - \mathrm{Tr}(M)A\right) + \mathrm{Tr}(A).N - \mathrm{Tr}(N).A \\ &= \lambda f(M) + f(N)\end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

De plus, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(A)M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Tr}(M)A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisque $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(M)$ sont des réels, et donc $f(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

3°) $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = 1 + 1 = 2, \text{ c'est bien non nul}}$.

4°) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$f(M) = 2.M - \mathrm{Tr}(M) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{f(M) = \begin{pmatrix} a-d & 2b+a+d \\ 2c & d-a \end{pmatrix}}$.

5°) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}M \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a - d = 0 \\ 2b + a + d = 0 \\ 2c = 0 \\ d - a = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} d = a \\ b = -a \\ c = 0 \end{cases} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & -a \\ 0 & a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ a.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ a \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(A)$.

Comme A est non nulle, (A) est libre, et comme elle est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$, $\boxed{(A) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f)}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \{f(M) \ / \ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a-d & 2b+a+d \\ 2c & d-a \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\
&= \left\{ a.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ car } \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a obtenu une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ formée de 3 vecteurs.

Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$, et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$.

Donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f).}$

6°) Soit $M \in \mathrm{Ker}(f)$. On a $f(M) = 0$ donc $\mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A = 0$ ie $\mathrm{Tr}(A)M = \mathrm{Tr}(M)A$, et comme $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, $M = \dfrac{\mathrm{Tr}(M)}{\mathrm{Tr}(A)}.A$.

Comme $\dfrac{\mathrm{Tr}(M)}{\mathrm{Tr}(A)} \in \mathbb{R}$, $\boxed{\text{on a bien } M \in \mathrm{Vect}(A)}$.

7°)
- D'après la question précédente, $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Vect}(A)$.
- Soit $M \in \mathrm{Vect}(A)$. Il existe un réel λ tel que $M = \lambda.A$.
  Calculons : par linéarité de f, $f(M) = \lambda.f(A) = \lambda.(\mathrm{Tr}(A).A - \mathrm{Tr}(A).A) = 0$. Ainsi $M \in \mathrm{Ker}(f)$.
  On en tire $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
- Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(A)}$.

8°) On a $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) \subset \mathbb{R}$, donc $\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$.

Par ailleurs $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) \neq \{0\}$ puisqu'il existe toujours des matrices de trace non nulle (par exemple, $\mathrm{Tr}(I_n) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n \neq 0$).

Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})) \geq 1$. Donc $\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})) = 1$ i.e. $\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})) = \dim(\mathbb{R})$.

Comme $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) \subset \mathbb{R}$, on en déduit que $\boxed{\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}}$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) + \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$.

Ainsi $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = n^2 - 1}$.

9°) D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$, et nous avons vu que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(A)$ avec A non nulle (car la trace de A est non nulle), donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n^2 - 1 = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}))$.

Soit $N \in \mathrm{Im}(f)$. $\exists\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N = f(M) = \mathrm{Tr}(A).M - \mathrm{Tr}(M).A$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(N) &= \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Tr}(A).M - \mathrm{Tr}(M).A\right) \\
&= \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(M) - \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(A) \qquad \text{car Tr est linéaire} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi $N \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

On a montré $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$. Grâce à l'égalité des dimensions, on en tire que $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})}$.

10°)
- On sait que $\{0\} \subset \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$ car $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $M \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$.
  Alors $M \in \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(A)$ donc $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$, $M = \lambda.A$.
  On a aussi $M \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ donc $\mathrm{Tr}(M) = 0$, i.e. $\lambda \mathrm{Tr}(A) = 0$ par linéarité de Tr.
  Comme $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, on en tire que $\lambda = 0$, d'où $M = 0$.
  Ainsi, $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) \subset \{0\}$, et par double inclusion, $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

- D'après le théorème du rang, on a aussi $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, ce qui permet de conclure que $\boxed{\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

11°) Comme $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, f est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $f \circ f = f$.
Calculons, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f \circ f(M) = f(f(M)) &= f(\mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A) \\ &= \mathrm{Tr}(A)f(M) - \mathrm{Tr}(M)f(A) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= \mathrm{Tr}(A)f(M) \quad \text{car } f(A) = 0 \text{ (montré en question 7)} \end{aligned}$$

Ainsi $f \circ f = \mathrm{Tr}(A).f$, et comme f n'est pas le vecteur nul de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $\mathrm{Tr}(A).f = f \iff \mathrm{Tr}(A) = 1$.
Ainsi : $\boxed{f \text{ projecteur } \iff \mathrm{Tr}(A) = 1}$.

Exercice 2

1°) a) Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q) \end{aligned}$$

Donc Δ est linéaire. De plus, Δ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$.
Donc $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X]}$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$.

★ Si $\boxed{k = 0}$ alors $\Delta(X^k) = (X+1)^0 - X^0 = 1 - 1 = 0$ donc $\boxed{\deg(\Delta(X^0)) = -\infty}$.

★ Si $\boxed{k \geq 1}$ alors

$$\begin{aligned} \Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k \qquad \text{par la formule du binôme} \\ &= X^k + \binom{k}{k-1} X^{k-1} - X^k + R \qquad \text{où } R \text{ est un polynôme de degré} < k-1 \\ &= kX^{k-1} + R \end{aligned}$$

Comme $k \neq 0$ et $\deg(R) < k - 1$, on en déduire que $\boxed{\deg(\Delta(X^k)) = k - 1}$.

2°) a) P est un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ donc, par le théorème de d'Alembert-Gauss, P admet au moins une racine α dans $\mathbb{C}$: $P(\alpha) = 0$.
On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}$, H_n : $P(\alpha + n) = 0$.

★ H_0 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie.
$P(X+1) = P(X)$ donc, en évaluant en $\alpha + n$, $P(\alpha + n + 1) = P(\alpha + n)$.
Or, par $H_n, P(\alpha + n) = 0$ donc $P(\alpha + n + 1) = 0$: H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(\alpha + n) = 0$.

Ainsi, le polynôme P admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. C'est exclu puisque P n'est pas constant.
$\boxed{\text{On a bien obtenu une contradiction}}$.

b) ★ Si $P \in \mathbb{R}_0[X]$ alors P est constant.
Donc, $P(X+1) = P(X)$ d'où $\Delta(P) = 0$: $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$.
Ainsi, $\mathbb{R}_0[X] \subset \mathrm{Ker}(\Delta)$.

★ Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$ i.e. $P(X+1) = P(X)$ alors, par 2a, P est constant car sinon on arrive à une contradiction. Donc $P \in \mathbb{R}_0[X]$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Delta) \subset \mathbb{R}_0[X]$.

Finalement, $\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]}$.

3°) a) Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$.
On note $p = \deg(P)$. Alors $p \geq 1$.

P s'écrit : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ où $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ et $a_p \neq 0$.

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= \sum_{k=0}^{p} a_k \Delta(X^k) \qquad \text{par linéarité de } \Delta \\ &= a_p \Delta(X^p) + \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1} a_k \Delta(X^k)}_{R} \end{aligned}$$

$\deg(R) \leq \max(\deg(\Delta(1)), \dots, \deg(\Delta(X^{p-1})))$.

Or, par 1, $\deg(\Delta(X^k)) = \begin{cases} -\infty \text{ si } k = 0 \\ k-1 \text{ si } k \geq 1 \end{cases}$.

Donc $\deg(R) < p-1$ et $\deg(\Delta(X^p)) = p-1$ et $a_p \neq 0$.

Donc $\deg(\Delta(P)) = p-1$. Ce qui s'écrit : $\boxed{\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1}$.

b) Soit $n \geq 1$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
Si P est constant alors $\Delta(P) = 0$. Sinon, $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1 \leq n-1$.
Donc, $\boxed{\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.
D'où $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ donc $\boxed{\mathbb{R}_n[X] \text{ est stable par } \Delta}$.

4°) ★ $\mathrm{Ker}(\Delta_n) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \ / \Delta(P) = 0\} = \mathrm{Ker}(\Delta) \cap \mathbb{R}_n[X]$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{R}_0[X]}$.

★ On a vu : $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'où $\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Or, d'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Im}(\Delta_n) &= \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim \mathrm{Ker}(\Delta_n) \\ &= n + 1 - 1 = n \\ &= \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] \end{aligned}$$

Récapitulons, on a : $\begin{cases} \mathrm{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ \dim \mathrm{Im}(\Delta_n) = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] \end{cases}$.

On en déduit que : $\boxed{\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

5°) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$.
Alors, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $Q \in \mathbb{R}_p[X]$. Alors $Q \in \mathrm{Im}(\Delta_{p+1})$.
Donc, $\exists P \in \mathbb{R}_{p+1}[X], Q = \Delta_{p+1}(P) = \Delta(P)$.
Donc, $\boxed{\Delta \text{ est surjective.}}$

6°) ★ Montrons que F est un sev de $\mathbb{R}[X]$.
$F \subset \mathbb{R}[X]$ par définition de F.
$F \neq \varnothing$ car $0 \in F$.
Soit $(P, Q) \in F^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0 \text{ car } (P, Q) \in F^2$$

Donc, $\lambda P + Q \in F$.
Ainsi, $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X]}$

★ Montrons que : $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathrm{Ker}\Delta$.
On a déjà : $\{0\} \subset F \cap \mathrm{Ker}(\Delta)$.
Réciproquement, soit $P \in F \cap \mathrm{Ker}(\Delta)$. Montrons que $P = 0$.
On a donc $P \in \mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$ donc P est constant. Or $P \in F$ donc $P(0) = 0$, donc la constante est nulle : $P = 0$.
Donc, $F \cap \mathrm{Ker}(\Delta) = \{0\}$.

★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On peut décomposer P de la manière suivante :

$$P = \underbrace{P - P(0)}_{Q} + P(0)$$

$P(0) \in \mathbb{R}_0[X] = \mathrm{Ker}(\Delta)$ et $Q(0) = P(0) - P(0) = 0$ donc $Q \in F$.
D'où, $\mathbb{R}[X] = F + \mathrm{Ker}(\Delta)$
On en déduit que : $\boxed{\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathrm{Ker}\Delta}$.

7°) a) Δ est surjective donc $\exists P_1 \in \mathbb{R}[X]$, $Q = \Delta(P_1)$.
Par la question précédente, $P_1 = P + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in F$, i.e. $P(0) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} Q &= \Delta(P + \lambda) \\ &= \Delta(P) + \Delta(\lambda) \qquad \text{par linéarité de } \Delta \\ &= \Delta(P) \text{ car } \lambda \in \mathrm{Ker}(\Delta) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a bien trouvé } P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P(0) = 0 \text{ et } \Delta(P) = Q}$.

b) Soit deux polynômes P_1 et P_2 tels que $\Delta(P_1) = Q$, $P_1(0) = 0$, et $\Delta(P_2) = Q$, $P_2(0) = 0$.
On a donc $\Delta(P_1) - \Delta(P_2) = 0$, i.e. $\Delta(P_1 - P_2) = 0$ par linéarité de Δ.
Donc $P_1 - P_2 \in \mathrm{Ker}(\Delta)$, donc $P_1 - P_2$ est constant.
Mais $(P_1 - P_2)(0) = P_1(0) - P_2(0) = 0$, donc la constante est nulle.
D'où $P_1 = P_2$.

$$\boxed{\text{D'où l'unicité de } P : \exists!\, P \in \mathbb{R}[X], \begin{cases} \Delta(P) = Q \\ P(0) = 0 \end{cases}}.$$

On suppose que $Q \neq 0$. Donc $\Delta(P) \neq 0$ donc $P \notin \mathrm{Ker}\,\Delta = \mathbb{R}_0[X]$. Ainsi, P n'est pas constant, donc le degré de $\Delta(P)$ vaut $\deg(P) - 1$ par la question 3a. Donc $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.
Ce qui s'écrit $\boxed{\deg(P) = \deg(Q) + 1}$.

8°) $X + 1 - X = 1$ i.e. $\Delta(X) = 1$. De plus, $X(0) = 0$ donc, par unicité de P_1, $\boxed{P_1 = X}$.

9°) On pose, pour $n \geq 1$: $R_n = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$.
On a : $R_n(0) = 0$.
Si $n = 1$ alors $\Delta(R_1) = \Delta(X) = 1 = P_0$.
Si $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \Delta(R_n) &= \frac{(X+1)X\cdots(X-n+2)}{n!} - \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!} \\ &= \frac{X(X-1)\cdots(X-n+2)}{n!}(X+1-(X-n+1)) \\ &= \frac{X(X-1)\cdots(X-n+2)}{(n-1)!} \\ &= R_{n-1} \end{aligned}$$

Par unicité de la suite (P_n), on en déduit que : $\boxed{P_n = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}}$.

10°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que : $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, $\deg(P_i) = i$.
Ainsi, la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré donc elle forme une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Or elle a $n + 1$ éléments et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$.
Donc, $\boxed{(P_0, \ldots, P_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$.

11°) ★ $P_1 = X$, $P_2 = \dfrac{X^2 - X}{2}$. On en déduit : $\boxed{X^2 = 2P_2 + P_1}$.

★ $P_1 = X$, $P_2 = \dfrac{X^2 - X}{2}$, $P_3 = \dfrac{X(X-1)(X-2)}{6} = \dfrac{X^3 - 3X^2 + 2X}{6}$. D'où,

$$\begin{aligned} X^3 &= 6P_3 + 3X^2 - 2X \\ &= 6P_3 + 3(2P_2 + P_1) - 2P_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{X^3 = 6P_3 + 6P_2 + P_1}$$

12°) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question 7, en posant $Q = X^n$, $\exists ! A_n \in \mathbb{R}[X]$, $\begin{cases} \Delta(A_n) = X^n \\ A_n(0) = 0 \end{cases}$.

De plus, comme $X^n \neq 0$, $\deg(A_n) = \deg(X^n) + 1 = n + 1$.

Donc $\boxed{\exists ! A_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X], \begin{cases} \Delta(A_n) = X^n \\ A_n(0) = 0 \end{cases}}$.

b) Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On a : $A_n(X+1) - A_n(X) = X^n$.
Donc, pour tout $k \in \{0 \ldots, p\}$, $A_n(k+1) - A_n(k) = k^n$. On somme de $k = 0$ à $k = p$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p} (A_n(k+1) - A_n(k)) &= \sum_{k=0}^{p} k^n \\ A_n(p+1) - A_n(0) &= \sum_{k=0}^{p} k^n \qquad \text{par téléscopage} \end{aligned}$$

$$\boxed{A_n(p+1) = S_{n,p}}$$

c) On pose : $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}$. On a bien : $B_n(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}(0) = 0$.

De plus, comme Δ est linéaire, $\Delta(B_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Delta(P_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$. Donc $\Delta(B_n) = X^n$.

Par unicité du polynôme A_n, on a : $\boxed{A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}}$.

d) On a vu : $X^2 = 2P_2 + P_1$. Donc, $\boxed{A_2 = 2P_3 + P_2}$.

On a vu : $X^3 = 6P_3 + 6P_2 + 6P_1$. Donc, $\boxed{A_3 = 6P_4 + 6P_3 + P_2}$.

e) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

★ $S_{2,p} = A_2(p+1) = 2P_3(p+1) + P_2(p+1) = 2 \times \dfrac{(p+1)p(p-1)}{6} + \dfrac{p(p+1)}{2} = \dfrac{p(p+1)}{6}(2(p-1)+3)$.

Donc, $\boxed{S_{2,p} = \dfrac{(p+1)p(2p+1)}{6}}$.

★ De même :

$S_{3,p} = A_3(p+1) = 6\dfrac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{24} + 6\dfrac{(p+1)p(p-1)}{6} + \dfrac{p(p+1)}{2}$

$S_{3,p} = \dfrac{p(p+1)}{4}((p-1)(p-2) + 4(p-1) + 2) = \dfrac{p(p+1)}{4}(p^2 - 3p + 2 + 4p - 4 + 2) = \dfrac{p(p+1)p(p^2+p)}{4}$

Donc $\boxed{S_{3,p} = \dfrac{p^2(p+1)^2}{4}}$.

Exercice 3

1°) a) f et id_E sont dans $\mathcal{L}(E)$, donc p et q aussi puisque $\mathcal{L}(E)$ est stable par combinaison linéaire.

$$\begin{aligned} p \circ p &= (f - 2\,\mathrm{id}_E) \circ (f - 2\,\mathrm{id}_E) \\ &= f \circ f + f \circ (-2\,\mathrm{id}_E) - 2\,\mathrm{id}_E \circ f - (2\,\mathrm{id}_E) \circ (-2\,\mathrm{id}_E) \\ &= f^2 - 2f - 2f + 4\,\mathrm{id}_E \\ &= 5f - 6\,\mathrm{id}_E - 4f + 4\,\mathrm{id}_E \qquad \text{car } f^2 = 5f - 6\,\mathrm{id}_E \\ &= f - 2\,\mathrm{id}_E \\ &= p \end{aligned}$$

Changeons de méthode pour q : on peut utiliser la formule du binôme puisque f et $3\,\mathrm{id}_E$ commutent.

$$\begin{aligned} q \circ q &= (3\,\mathrm{id}_E - f)^2 \\ &= 9\,\mathrm{id}_E - 6f + f^2 \\ &= 9\,\mathrm{id}_E - 6f + 5f - 6\,\mathrm{id}_E \\ &= -f + 3\,\mathrm{id}_E \\ &= q \end{aligned}$$

Ainsi, $p \in \mathcal{L}(E)$, $q \in \mathcal{L}(E)$, $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$, donc $\boxed{p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs de } E.}$

b)

$$\begin{aligned} p \circ q &= (f - 2\,\mathrm{id}_E) \circ (-f + 3\,\mathrm{id}_E) \\ &= -f^2 + 3f + 2f - 6\,\mathrm{id}_E \\ &= -f^2 + 5f - 6\,\mathrm{id}_E \end{aligned}$$

$$\boxed{p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}}$$

De même, on obtient $\boxed{q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

c) Effectuons une combinaison linéaire entre les 2 lignes définissant p et q permettant de se débarrasser de id_E :

$$\begin{array}{ccc} p & = & f - 2\,\mathrm{id}_E \\ q & = & -f + 3\,\mathrm{id}_E \\ \hline 3p + 2q & = & f \end{array}$$

Ainsi, $\boxed{f = 3p + 2q}$.

d) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, H_n : $f^n = 3^n p + 2^n q$.

★ Pour $n = 0$: $f^0 = \mathrm{id}_E$. De plus, $3^0 p + 2^0 q = p + q = \mathrm{id}_E$. Donc H_0 est vraie.

★ On suppose que H_n est vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f^{n+1} &= f^n \circ f \\ &= (3^n p + 2^n q) \circ (3p + 2q) \text{ par } H_n \text{ et par la question précédente} \\ &= 3^{n+1} p \circ p + (3^n \times 2) p \circ q + (2^n \times 3) q \circ p + 2^{n+1} q \circ q \\ &= 3^{n+1} p + 2^{n+1} q \text{ car } p \circ p = p,\ q \circ q = q,\ p \circ q = 0,\ q \circ p = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = 3^n p + 2^n q}$.

2°) a) Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda(x, y) + (x', y')) \\ &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= (\,(\lambda x + x') - (\lambda y + y'), 2(\lambda x + x') + 4(\lambda y + y')\,) \\ &= (\,\lambda(x - y) + x' - y', \lambda(2x + 4y) + 2x' + 4y'\,) \\ &= \lambda(x - y, 2x + 4y) + (x' - y', 2x' + 4y') \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire. De plus, f va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^2}$.

b) Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
f^2(u) &= f^2(x,y) = f\left(f(x,y)\right)\\
&= f(x-y, 2x+4y)\\
&= (\,(x-y)-(2x+4y), 2(x-y)+4(2x+4y)\,)\\
&= (-x-5y, 10x+14y)\\
(5f-6\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})(u) &= 5f(u)-6u\\
&= (5x-5y, 10x+20y)-(6x,6y)\\
&= (-x-5y, 10x+14y)
\end{aligned}$$

Ainsi, $f^2(u)=(5f-6\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})(u)$, ceci pour tout $u\in\mathbb{R}^2$.

Finalement, $\boxed{f^2=5f-6\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}}$.

c) $p=f-2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$p(u)=f(u)-2u=f(x,y)-2(x,y)=(x-y,2x+4y)-(2x,2y)=(-x-y,2x+2y)$

Ainsi, $\boxed{\begin{array}{llll} p: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ & (x,y) & \mapsto & (-x-y,2x+2y)\end{array}}$.

d) p est <u>une</u> projection. C'est <u>la</u> projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Déterminons $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$.

★ Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
u\in\mathrm{Ker}(p) &\iff p(u)=0_{\mathbb{R}^2}\\
&\iff (-x-y,2x+2y)=(0,0)\\
&\iff y=-x
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(p)=\{(x,-x)/x\in\mathbb{R}\}=\{x(1,-1)/x\in\mathbb{R}\}$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}(p)=\mathrm{Vect}(\,(1,-1)\,)}$.

★ $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Vect}(p(e_1),p(e_2))$ où (e_1,e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$p(e_1)=p(1,0)=(-1,2)$ et $(e_2)=p(0,1)=(-1,2)=p(e_1)$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Vect}(\,(-1,2)\,)}$.

$\boxed{p \text{ est la projection sur la droite } D_1=\mathrm{Vect}(\,(-1,2)\,) \text{ parallèlement à la droite } D_2=\mathrm{Vect}(\,(1,-1)\,)}$.

e) On sait $p+q=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ (cf. 1d pour $n=0$). Donc, $q=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}-p$.

Ainsi, pour tout $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$q(u)=u-p(u)=(x,y)-(-x-y,2x+2y)=(2x+y,-2x-y)$.

Ainsi, $\boxed{\begin{array}{llll} q: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ & (x,y) & \mapsto & (2x+y,-2x-y)\end{array}}$.

q est le projecteur associé à p donc $\boxed{q \text{ est la projection sur } D_2 \text{ parallèlement à } D_1}$.

f) On remarque que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $(a_{n+1},b_{n+1})=f(a_n,b_n)$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $H_n:(a_n,b_n)=f^n(a_0,b_0)$.

★ $f^0(a_0,b_0)=\mathrm{id}(a_0,b_0)=(a_0,b_0)$ donc H_0 est vraie.

★ Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie.

$(a_{n+1},b_{n+1})=f(a_n,b_n)=f(f^n(a_0,b_0))$ par H_n.

Donc $(a_{n+1},b_{n+1})=f\circ f^n(a_0,b_0)=f^{n+1}(a_0,b_0)$. Donc H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $(a_n,b_n)=f^n(a_0,b_0)=f^n(1,2)$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Par 1d, $f^n=3^np+2^nq$. Donc,

$$\begin{aligned}
(a_n,b_n) &= 3^np(1,2)+2^nq(1,2)\\
&= 3^n(-3,6)+2^n(4,-4) \qquad \text{par 2c et 2e}\\
&= (-3^{n+1},2\times3^{n+1})+(2^{n+2},-2^{n+2})\\
&= (-3^{n+1}+2^{n+2},2(3^{n+1}-2^{n+1}))
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{a_n=2^{n+2}-3^{n+1}}$ et $\boxed{b_n=2\left(3^{n+1}-2^{n+1}\right)}$.