Correction du devoir surveillé 5.

Exercice 1

1°) a) $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Ainsi, $\boxed{M^2 = 3M - 2I}$.

b) On en déduit que $3M - M^2 = 2I$.

En factorisant par M à gauche, on obtient $M\left(\frac{3}{2}I - \frac{1}{2}M\right) = I$, et en factorisant par M à droite, $\left(\frac{2}{2}I - \frac{1}{2}M\right)M = I$.

Ainsi, $\boxed{M \text{ est inversible et } M^{-1} = \frac{2}{2}I - \frac{1}{2}M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

2°) a) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, M^n = a_n I + b_n M$.

★ Pour $n = 0$: $M^0 = I = 1.I + 0.M$ donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ conviennent. Ainsi, H_0 est vraie.

★ On suppose que H_n est vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$.
Alors, il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = a_n I + b_n M$.

$$\begin{aligned} M^{n+1} = M^n \times M &= (a_n I + b_n M)M && \text{par } H_n \\ &= a_n M + b_n M^2 \\ &= a_n M + b_n(3M - 2I) && \text{par 1a} \\ &= -2b_n I + (a_n + 3b_n)M \end{aligned}$$

En posant $a_{n+1} = -2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 3b_n$, on a $M^{n+1} = a_{n+1}I + b_{n+1}M$,

★ On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, H_n \text{ est vraie.}}$

De plus, on a obtenu les relations : $\boxed{a_{n+1} = -2b_n \qquad b_{n+1} = a_n + 3b_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + 3b_n - 2b_n = a_n + b_n$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (a_n + b_n) \text{ est constante.}}$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n + b_n = a_0 + b_0$ donc $\boxed{a_n + b_n = 1}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $b_{n+2} = a_{n+1} + 3b_{n+1} = -2b_n + 3b_{n+1}$ par 2a.

Donc, $\boxed{b_{n+2} = 3b_{n+1} - 2b_n}$.

d) La suite (b_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
L'équation caractéristique est : $r^2 - 3r + 2 = 0$ de racines 1 et 2. Ainsi,

$$\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, b_n = \lambda + \mu 2^n$$

$b_0 = 0$ et $b_1 = a_0 + 3b_0 = 1$. Donc, $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{cases}$ $\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\text{i.e.}}$ $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$ d'où $\mu = 1, \lambda = -1$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, b_n = 2^n - 1}$.

De plus, on sait, pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n + b_n = 1$ donc $\boxed{a_n = 1 - b_n = 2 - 2^n}$.

Ainsi, $\boxed{M^n = (2-2^n)I + (2^n - 1)M}$.

$$M^n = \begin{pmatrix} 2-2^n+3(2^n-1) & -2(2^n-1) & -(2^n-1) \\ 2-2^n & 2-2^n & -(2^n-1) \\ 0 & 0 & 2-2^n+2(2^n-1) \end{pmatrix}$$

$$\text{i.e. } \boxed{M^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2-2^{n+1} & 1-2^n \\ 2^n-1 & 2-2^n & 1-2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

e) Pour $n = -1$, l'expression donne $\begin{pmatrix} 1-1 & 2-1 & 1-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-1 & 2-\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\boxed{\text{c'est bien } M^{-1}}$.

3°) a) $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^{2k} = (B^2)^k = I^k = I$, et $B^{2k+1} = B^{2k}B = I \times B = B$.

b) On a $M = \frac{1}{2}B + \frac{3}{2}I = \frac{1}{2}(B+3I)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}}(B+3I)^{2n+1}$.

Comme B et $3I$ commutent, d'après la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{p=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{p}(3I)^{2n+1-p}B^p = \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{p=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{p}3^{2n+1-p}B^p$$

En séparant dans cette somme les termes d'indices p pair et les termes d'indices p impairs, et à l'aide de la question précédente, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} M^{2n+1} &= \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}3^{2n+1-2k}I \;+\; \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}3^{2n+1-(2k+1)}B \\ &= \left(\frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}3^{2n+1-2k}\right)I \;+\; \left(\frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}3^{2n-2k}\right)B \end{aligned}$$

$\boxed{M^{2n+1} = r_nI + s_nB}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la question précédente et de la question 2d,

$$M^{2n+1} = \begin{pmatrix} 2^{2n+2}-1 & 2-2^{2n+2} & 1-2^{2n+1} \\ 2^{2n+1}-1 & 2-2^{2n+1} & 1-2^{2n+1} \\ 0 & 0 & 2^{2n+1} \end{pmatrix} = r_n\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + s_n\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En considérant le coefficient $(2,1)$, on obtient $2^{2n+1} - 1 = 2s_n$, d'où $\boxed{s_n = 2^{2n} - \frac{1}{2}}$.

En considérant le coefficient $(3,3)$, on obtient $2^{2n+1} = r_n + s_n$.

D'où $r_n = 2^{2n+1} - 2^{2n} + \frac{1}{2} = 2.2^{2n} - 2^{2n} + \frac{1}{2}$, donc $\boxed{r_n = 2^{2n} + \frac{1}{2}}$.

Exercice 2

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$X_{n+1} = A^{n+1}X_0 = A(A^nX_0)$ donc $\boxed{X_{n+1} = AX_n}$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Il vient : $\boxed{\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}}$.

2°) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $H_n : X_n \in \mathcal{H}_+$.

★ Pour $n = 0$. $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie : $1 \in \mathbb{N}, 0 \in \mathbb{N}$. De plus $1^2 - 3 \times 0^2 = 1$. Donc $X_0 \in \mathcal{H}_+$.

★ On suppose H_n vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$. Montrons que H_{n+1} est vraie.

Par la question précédente, $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$.

Or x_n et y_n sont dans $\mathbb{N}$ donc x_{n+1} et y_{n+1} aussi, comme sommes et produits d'entiers naturels. De plus,

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 3y_{n+1}^2 &= 4x_n^2 + 12x_ny_n + 9y_n^2 - 3(x_n^2 + 4x_ny_n + 4y_n^2) \\ &= x_n^2(4-3) + y_n^2(9-12) + x_ny_n(12-12) \\ &= x_n^2 - 3y_n^2 \\ &= 1 \qquad \text{car } X_n \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \in \mathcal{H}_+}$.

On en déduit que $\boxed{\mathcal{E} \subset \mathcal{H}^+}$.

3°) Par ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n \in \mathcal{H}^+$. Précisons X_0, X_1, X_2.

$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $X_1 = AX_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = AX_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ dont des éléments de } \mathcal{H}^+}$.

4°)

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 & \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Par opérations élémentaires sur les lignes, on a transformé A en I_2.

Ainsi, $\boxed{A \text{ est inversible}}$. De plus, $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$.

5°) a) $y \in \mathbb{N}$ donc $y \geq 0$. Supposons que $y = 0$. Comme $X \in \mathcal{H}$, $x^2 - 3y^2 = 1$. D'où $x^2 = 1$.

Comme $x \in \mathbb{N}$, $x = 1$. Finalement, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $X = X_0$: ceci est exclu.

On en déduit que $\boxed{y \geq 1}$.

b) ★ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Donc, $\boxed{\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = -x + 2y \end{cases}}$.

★ Vérifions que $BX \in \mathcal{H}$.

$x'^2 - 3y'^2 = (2x - 3y)^2 - 3(-x + 2y)^2 = x^2(4-3) + y^2(9-12) = x^2 - 3y^2 = 1$ car $X \in \mathcal{H}$.

Donc $BX \in \mathcal{H}$.

★ Vérifions maintenant que $x' \in \mathbb{N}, y' \in \mathbb{N}$.
x' et y' sont des entiers relatifs comme sommes, produits, différences d'entiers.
Montrons que $x' \geq 0$ et $y' \geq 0$.

$$\begin{aligned} x' \geq 0 &\iff 2x \geq 3y \\ &\iff 4x^2 \geq 9y^2 \qquad \text{car } 2x \geq 0 \text{ et } 3y \geq 0 \\ &\iff 4(1+3y^2) \geq 9y^2 \qquad \text{car } X \in \mathcal{H} \\ &\iff \underbrace{3y^2 + 4 \geq 0}_{\text{vrai}} \end{aligned}$$

Donc $2x - 3y \geq 0$.

$$\begin{aligned} y' \geq 0 &\iff -x + 2y \geq 0 \\ &\iff 2y \geq x \\ &\iff 4y^2 \geq x^2 \qquad \text{car } 2x \geq 0 \text{ et } 3y \geq 0 \\ &\iff 4y^2 \geq 1 + 3y^2 \qquad \text{car } X \in \mathcal{H} \\ &\iff y^2 \geq 1 \end{aligned}$$

Par 5a, $y \geq 1$ donc $y^2 \geq 1$. Donc $y' \geq 0$.

On a bien montré que $\boxed{BX \in \mathcal{H}^+}$.

c) Montrons que $\varphi(BX) < \varphi(X)$.
$\varphi(BX) = x' + y' = (2x - 3y) + (-x + 2y) = x - y$. D'autre part, $\varphi(X) = x + y$.
Or $y \geq 1$ donc $y > 0$ donc $\boxed{\varphi(BX) < \varphi(X)}$.

6°) ★ On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, H_n : $B^n X \in \mathcal{H}^+$.

- Pour $n = 0$: $B^0 X = X$ et $X \in \mathcal{H}^+$. Ainsi, H_0 est vraie.
- On suppose H_n vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$: $B^n X \in \mathcal{H}^+$.
  De plus, $B^n X \neq X_0$. Par 5b, $B(B^n X) \in \mathcal{H}^+$ *i.e.* $B^{n+1} X \in \mathcal{H}^+$. Ainsi, H_{n+1} est vraie.
- On a montré, par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ B^n X \in \mathcal{H}^+$.

★ De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n X \neq X_0$.
Donc, par 5c, pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi(B(B^n X)) < \varphi(B^n X)$ *i.e.* $\varphi(B^{n+1} X) < \varphi(B^n X)$: $u_{n+1} < u_n$.
$\boxed{(u_n) \text{ est donc une suite strictement décroissante}}$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$; notons α_n et β_n les réels tels que $B^n X = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$.
$B^n X \in \mathcal{H}^+$ donc α_n et β_n sont dans $\mathbb{N}$. Donc $u_n = \varphi(B^n X) = \alpha_n + \beta_n \in \mathbb{N}$.
Ainsi, (u_n) est une suite d'entiers naturels strictement décroissante : c'est impossible vu le résultat admis en début de partie.
On en déduit que : $\boxed{\forall X \in \mathcal{H}^+, \exists\, n \in \mathbb{N},\ B^n X = X_0}$.

7°) ★ On a déjà vu que, par 2, que : $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}^+$.
★ Réciproquement, soit $X \in \mathcal{H}^+$.
Par 6, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B^n X = X_0$.
Ainsi, $(A^{-1})^n X = X_0$. Donc $(A^n)^{-1} X = X_0$ *i.e.* $X = A^n X_0$. Ainsi, $X \in \mathcal{E}$.

Finalement, on a montré que :

$$\boxed{\mathcal{H}^+ = \mathcal{E} \ \textit{i.e.}\ \mathcal{H}^+ = \{A^n X_0 \ / n \in \mathbb{N}\}}$$

8°) Effectuons deux calculs :

$A \times P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}+3 & -2\sqrt{3}+3 \\ \sqrt{3}+2 & -\sqrt{3}+2 \end{pmatrix}$.

$P \times D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}+3 & -2\sqrt{3}+3 \\ 2+\sqrt{3} & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a bien : $\boxed{AP = PD}$.

9°) Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de P.

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \sqrt{3}L_1$$

On a transformé P, par opérations élémentaires, en la matrice T.
Or T est triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux tous non nuls, donc T est inversible.
Donc, $\boxed{P \text{ est inversible}}$.

10°) P est inversible donc on peut multiplier les 2 membres de l'égalité $AP = PD$ à droite par P^{-1}.
On obtient $\boxed{A = PDP^{-1}}$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : A^n = PD^nP^{-1}$.

- Pour $n = 0$: $PD^0P^{-1} = I_2 = A^0$ donc H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie.
  Alors $A^{n+1} = A^n \times A = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = P(D^nD))P^{-1}$ donc $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
  Donc H_{n+1} est vraie.
- On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}}$.

11°) On suppose qu'il existe k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $A^kX_0 = X_0$.
On a donc, par la question précédente : $PD^kP^{-1}X_0 = X_0$.
En multipliant à gauche par P^{-1} : $D^k(P^{-1}X_0) = P^{-1}X_0$.
On note $\boxed{Y_0 = P^{-1}X_0}$. Alors, on a $\boxed{D^kY_0 = Y_0}$.
Par l'absurde, supposons $Y_0 = 0$. Alors, $P^{-1}X_0 = 0$.
En multipliant à gauche par P, cela donne : $X_0 = 0$: ceci est exclu.
Ainsi, $\boxed{Y_0 \neq 0}$.

12°) Notons a et b les réels tels que $Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. $Y_0 \neq 0$ donc $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

$D = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Donc, $D^k = \begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})^k & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^k \end{pmatrix}$.

On a alors : $\begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})^k & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Ainsi, $\begin{cases} (2+\sqrt{3})^k a = a \\ (2-\sqrt{3})^k b = b \end{cases}$.

On sait que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

- Supposons $a \neq 0$. Alors, $(2+\sqrt{3})^k = 1$.
  Or $2+\sqrt{3} > 1$ donc $(2+\sqrt{3})^k > 1$. C'est exclu.
- Supposons que $b \neq 0$. Alors, $(2-\sqrt{3})^k = 1$. Or $1 < 3 < 4$ donc $1 < \sqrt{3} < 2$ donc $0 < 2-\sqrt{3} < 1$. Donc $(2-\sqrt{3})^k < 1$. C'est exclu aussi.

Dans les 2 cas, $\boxed{\text{on obtient une contradiction}}$.

On en déduit que : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, A^kX_0 \neq X_0}$.

13°) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $n \neq p$. Montrons que $A^nX_0 \neq A^pX_0$.
Par l'absurde, supposons que $A^nX_0 = A^pX_0$.
$n \neq p$. Supposons par exemple que $n > p$.
Comme A est inversible, A^p aussi. On multiplie $A^nX_0 = A^pX_0$ à gauche par $(A^p)^{-1}$.
On obtient : $(A^p)^{-1}A^nX_0 = X_0$. Donc $(A^{-1})^pA^nX_0 = X_0$.
Ce qui s'écrit : $A^{n-p}X_0 = X_0$. On a trouvé k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $A^kX_0 = X_0$: exclu.
Donc, on a bien $A^nX_0 \neq A^pX_0$.
Le raisonnement est analogue si $p > n$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'énoncé } (*) \text{ est vrai}}$.

Exercice 3

1°) $f(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x}{x+o(x)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{1+o(1)}$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = 1$.
D'autre part, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues.
Ainsi, $\boxed{f \text{ se prolonge en une fonction continue sur } \mathbb{R} \text{ en posant } f(0) = 1.}$

2°)
- D'après la question précédente, f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2(x)}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^3}{3} + o(x^3)\end{aligned}$$

D'autre part, $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ donc $\operatorname{sh}^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^2)$.
Ainsi, $f'(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2\left(-\frac{x}{3} + o(x)\right)}{x^2(1+o(1))} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{-\frac{x}{3} + o(x)}{1+o(1)}$.
Ainsi, par opérations sur les limites, $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Donc, par le théorème limite de la dérivée, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

★ Cela signifie que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.
★ L'information $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ se réécrit $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0)$, donc f' est continue en 0.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions de classe C^1, on conclut finalement que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

3°) **a)** La fonction sh est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.
Par le théorème de la bijection, sh réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[\operatorname{sh}(0), \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x)[= \mathbb{R}_+$.
Comme $1 \in \mathbb{R}_+$, 1 admet un unique antécédent α dans $\mathbb{R}_+$.
Ce qui signifie que $\boxed{\text{l'équation } \operatorname{sh}(x) = 1 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}_+}$.
Comme $\operatorname{sh}(0) = 0 \neq 1$, on a $\boxed{\alpha > 0}$.
On a $\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{sh}^2\alpha = 1$ d'où $\operatorname{ch}^2\alpha = 1 + (1)^2 = 2$.
Comme ch est une fonction positive, on en déduit que $\boxed{\operatorname{ch}(\alpha) = \sqrt{2}}$.

b) $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\operatorname{sh}(\alpha)} = \alpha$. Ainsi, $\boxed{\alpha \text{ est un point fixe de } f}$.

4°) **a)** u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u'(x) = \operatorname{ch}(x) + x\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) = x\operatorname{sh}(x)$.
On a : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u'(x) \geq 0$ et $u'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $\operatorname{sh}(x) = 0$.
Or $\operatorname{sh}(x) = 0 \iff x = 0$. Donc $u'(x) = 0 \iff x = 0$.
Donc u est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.
Comme $u(0) = 0$, on a : $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) \geq 0 \text{ et } u(x) = 0 \iff x = 0}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\dfrac{u(x)}{\operatorname{sh}^2(x)} < 0$. De plus $f'(0) = 0$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle } \mathbb{R}_+}$.

c) On sait que : $\alpha > 0$. Donc, par stricte décroissance de f sur $\mathbb{R}_+$, $f(\alpha) < f(0)$ ie $f(\alpha) < 1$. Or $f(\alpha) = \alpha$ donc $\boxed{\alpha < 1}$.

d) Posons $v(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sh}^2(x) - x\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
v est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$v'(x) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} x - x\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - x\operatorname{sh} x = \operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x - x).$$

Comme sh est positive sur $\mathbb{R}_+$, $v'(x)$ est du signe de $w(x) = \operatorname{ch} x - x$.
w est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $w'(x) = \operatorname{sh} x - 1$.

$$\begin{aligned} w'(x)\, 0 &\iff \operatorname{sh} x > 1 \\ &\iff \operatorname{sh} x > \operatorname{sh}\alpha \\ &\iff x > \alpha \qquad \text{car sh est strictement croissante} \end{aligned}$$

De même, $w'(x) = 0 \iff x = \alpha$.

x	0		α		$+\infty$
$w'(x)$		$-$	0	$+$	
$w(x)$	1	$\searrow$	$w(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$w(\alpha) = \operatorname{ch}(\alpha) - \alpha = \sqrt{2} - \alpha$. Comme $\alpha < 1 < \sqrt{2}$, la fonction w est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc v' est positive sur $\mathbb{R}_+$. Donc v est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, et comme $v(0) = 0$, on obtient bien que v est positive sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad x\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) \leq \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2(x)}$$

e) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) \leq 0$ par 4b. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$|f'(x)| = -f'(x) = \frac{x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}^2(x)} \leq \frac{1}{2} \text{ d'après la question précédente, et parce que } \operatorname{sh}^2 x > 0.$$

Cette inégalité est encore valable pour $x = 0$ puisque $f'(0) = 0$. Ainsi, $\boxed{k = \dfrac{1}{2} \text{ convient.}}$

f) D'après le calcul de la question 2, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2(x)}$. Comme sh est impaire et ch est paire, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,

$$f'(-x) = \frac{\operatorname{sh}(-x) + x\operatorname{ch}(-x)}{\operatorname{sh}^2(-x)} = \frac{-\operatorname{sh}(x) + x\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)} = -f'(x)$$

D'où $|f'(x)| = |-f'(-x)| = |f'(-x)| \leq k$ puisque $-x \in \mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq k}$.

5°) a) f est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f'(x)| \leq k = \dfrac{1}{2}$, donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et que $f(\alpha) = \alpha$, on obtient bien : $\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|}$.

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n : |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$.

- P_0 est vraie car $\frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha|$.
- Supposons P_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned} & |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \quad \text{d'après la question précédente} \\ \text{or} \quad & \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha| \quad \text{par l'hypothèse de récurrence} \\ \text{d'où} \quad & |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - \alpha| \quad : P_{n+1} \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|}$.

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit par le théorème d'encadrement que $u_n - \alpha \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha}$.

6°) On a $f(0) = 1$ donc $\text{ch}(0)f(2.0) = 1 \times 1 = 1 = f(0)$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} \text{ch}(x)f(2x) &= \text{ch}(x)\frac{2x}{\text{sh}(2x)} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} 2x \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}} \\ &= (e^x + e^{-x})x\frac{2}{(e^x)^2 - (e^{-x})^2} \\ &= x\frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{x}{\text{sh}(x)} = f(x) \end{aligned}$$

Ainsi, f vérifie $(*)$.

Comme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue d'après la question 1, $\boxed{f \in \mathcal{E}}$.

7°) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\text{sh}(x) \neq 0$ et $x \neq 0$ donc $f(x) \neq 0$, et $f(0) = 1 \neq 0$, donc $\boxed{\varphi \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme $\text{ch}(x) \neq 0$,

$$\varphi(2x) = \frac{g(2x)}{f(2x)} = \frac{\text{ch}(x)g(2x)}{\text{ch}(x)f(2x)} = \frac{g(x)}{f(x)} = \varphi(x).$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ \varphi(2x) = \varphi(x)}$.

c) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi\left(2\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$, i.e. $a_n = a_{n+1}$.

La suite (a_n) est donc constante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0$. Donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_0 = \varphi(x)$.

Par ailleurs, comme $2 > 1$, $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\frac{x}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par quotient, φ est continue, en particulier en 0. Donc $a_n = \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(0)$

Par unicité de la limite, $\boxed{\varphi(x) = \varphi(0)}$.

8°)
- Soit $g \in \mathcal{E}$. D'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(0)}{f(0)}$ donc $g(x) = \frac{g(0)}{f(0)}f(x)$.
  Ainsi, g s'écrit $\lambda.f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
  On a donc $\mathcal{E} \subset \{\lambda.f \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Réciproquement, si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors, grâce à la question 6, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}(x)(\lambda.f)(2x) = \lambda\,\text{ch}(x)f(2x) = \lambda f(x),$$

  et $\lambda.f$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\lambda.f \in \mathcal{E}$.
  On a donc $\{\lambda.f \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{E}$.
- Conclusion : $\boxed{\mathcal{E} = \{\lambda.f \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(f)}$.