Devoir surveillé 5.

Samedi 22 février 2025, de 7h45 à 11h45.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' *encadrer* *ou de souligner les résultats, et de laisser une* ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

On note $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1°) a) Montrer que M^2 peut s'écrire comme combinaison linéaire de I et M.

b) En déduire que M est une matrice inversible et calculer M^{-1}. On explicitera ses 9 coefficients.

2°) Un premier calcul de M^n

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple (a_n, b_n) de réels tel que :

$$M^n = a_n I + b_n M$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}, a_{n+1}$ et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

b) Montrer que la suite (c_n) définie par $c_n = a_n + b_n$ est constante. Qu'en déduit-on ?

c) Montrer que la suite (b_n) vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+2} = 3b_{n+1} - 2b_n$.

d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n puis a_n en fonction de n. En déduire l'expression de M^n.
On explicitera les 9 coefficients de la matrice.

e) L'expression est-elle valable pour $n = -1$?

3°) Une application du calcul précédent

On définit la matrice $B = 2M - 3I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux sommes :

$$r_n = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} 3^{2n+1-2k} \qquad \text{et} \qquad s_n = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 3^{2n-2k}$$

a) Sans faire de récurrence, justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^{2k} = I$ et $B^{2k+1} = B$.

b) Exprimer M à l'aide de I et de B.
A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer une expression de M^{2n+1} faisant intervenir les sommes r_n, s_n et les matrices I, B.

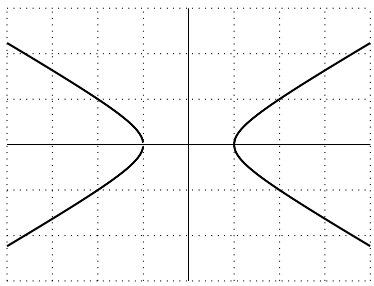
c) En comparant avec l'expression trouvée à la question 2d, en déduire des expressions simples, en fonction de n, de r_n et s_n.

Exercice 2

L'ensemble des couples (x, y) de réels tels que

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

forme une courbe que l'on appelle une *hyperbole.*



On se propose, dans cet exercice, de déterminer tous les points à coordonnées entières naturelles de cette hyperbole et montrer qu'ils forment un ensemble infini. On va utiliser une méthode matricielle.

On pose :

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \ / \ x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$$

Remarque : Les éléments de $\mathcal{H}$ sont donc des matrices colonnes.

On note $\mathcal{H}^+$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}$ à coordonnées entières naturelles *i.e.*

$$\mathcal{H}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \ / \ x \in \mathbb{N}, \ y \in \mathbb{N}, \ x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$$

`Remarque: Quitte à admettre des résultats, les trois parties sont largement indépendantes.`

Partie 1 : Une première inclusion

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$ où $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{E} = \{X_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

On notera également, pour $n \in \mathbb{N}$, x_n et y_n les réels tels que $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

1°) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, X_{n+1} en fonction de X_n puis x_{n+1}, y_{n+1} en fonction de x_n, y_n.

2°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \in \mathcal{H}^+$.
Quelle inclusion cela nous donne-t-il ?

3°) Expliciter 3 éléments de $\mathcal{H}^+$.

4°) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
Remarque : Vérifiez votre calcul avant de commencer la partie 2.

Partie 2 : Détermination de $\mathcal{H}^+$

Dans cette partie, on pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant :
Il n'existe pas de suite d'entiers naturels strictement décroissante.

Dans la suite, on note $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & x + y \end{array}$. On note aussi : $B = A^{-1}$.

5°) Soit $X \in \mathcal{H}^+$ telle que $X \neq X_0$. On note x, y, x', y' les réels tels que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $BX = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $y \geq 1$.

b) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
En déduire que : $BX \in \mathcal{H}^+$.

c) Montrer que : $\varphi(BX) < \varphi(X)$.

6°) Soit $X \in \mathcal{H}_+$. Supposons par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n X \neq X_0$.
On définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \varphi(B^n X)$.
Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
Aboutir à une contradiction. Qu'en conclut-on ?

7°) En déduire que $\mathcal{H}^+ = \mathcal{E}$.

Partie 3 : $\mathcal{H}^+$ est infini

Ainsi, d'après la question 7, l'ensemble $\mathcal{H}^+$ est $\{A^n X_0 \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Nous allons prouver, dans cette partie, l'énoncé :

$$(*) : \qquad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n \neq p \implies A^n X_0 \neq A^p X_0$$

Cela prouvera qu'il y a une infinité de points de l'hyperbole à coordonnées entières naturelles.

8°) Soit $P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Montrer que $AP = PD$.

9°) Justifier que P est inversible.
On ne calculera pas son inverse.

10°) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n$ en fonction de P, D, P^{-1}, n.

11°) On suppose qu'il existe k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $A^k X_0 = X_0$.
Montrer qu'il existe une matrice colonne Y_0, non nulle, telle que $D^k Y_0 = Y_0$.
On ne calculera pas Y_0 de manière explicite. On l'exprimera seulement à l'aide de X_0.

12°) Aboutir à une contradiction. Qu'en déduit-on ?

13°) Démontrer l'énoncé $(*)$.

Exercice 3

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{x}{\operatorname{sh} x}.$$

Les parties 2 et 3 sont indépendantes.

Partie 1 : Étude de la fonction f

1°) Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Dans toute la suite de l'exercice, f est ainsi prolongée sur $\mathbb{R}$.

2°) Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, par la méthode la plus rapide.

Partie 2 : Étude d'une suite

3°) **a)** Montrer que l'équation $\operatorname{sh}(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}_+$.
On ne cherchera pas à déterminer α.
Justifier que $\alpha > 0$.
Calculer $\operatorname{ch}(\alpha)$.

b) Que représente α pour f ?

4°) **a)** Déterminer le signe (au sens strict), sur $\mathbb{R}_+$ de $u : x \mapsto x\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$.

b) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

c) En déduire que : $\alpha < 1$.

d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $x\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) \leq \dfrac{1}{2}\operatorname{sh}^2(x)$.

e) Montrer qu'il existe un réel $k < 1$, que l'on précisera, tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)| \leq k$.

f) En déduire directement que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq k$.

5°) On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Partie 3 : Une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues qui vérifient la relation suivante :

$$(*) \;:\; \forall\, x \in \mathbb{R},\; \operatorname{ch}(x) g(2x) = g(x).$$

6°) Montrer que $f \in \mathcal{E}$.

7°) Soit $g \in \mathcal{E}$.

a) Justifier que la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{g(x)}{f(x)} \end{array}$ est bien définie.

b) Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(2x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \varphi\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
À l'aide de la suite (a_n), montrer que $\varphi(x) = \varphi(0)$.

8°) Montrer que $\mathcal{E} = \{\lambda f \;/\; \lambda \in \mathbb{R}\}$.