Correction du devoir surveillé 4.

Exercice 1

1°) • D'une part, comme $2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$:

$$1+e^{2x} \underset{x\to 0}{=} 1+1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2) \underset{x\to 0}{=} 2+2x+2x^2+o(x^2).$$

• D'autre part : $\dfrac{1}{\cos x+\sin x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+x+o(x^2)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$.

Posons $u = x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$. On a $u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $u \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc un $o(u^2)$ est un $o(x^2)$.

Comme $\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2+o(u^2)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x+\sin x} &\underset{x\to 0}{=} 1-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)+\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2\left(\frac{1}{2}+1\right)+x^2+o(x^2) \underset{x\to 0}{=} 1-x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

• Ainsi :

$$\begin{aligned}f(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(2+2x+2x^2+o(x^2)\right)\left(1-x+\frac{3x^2}{2}+o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 2-2x+3x^2+2x-2x^2+2x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 2+3x^2+o(x^2)}$$

2°) Pour $x>1$, $f(x) = |x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\exp\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) = x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\exp\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$.

On développe ce qui est facteur de x avec une précision en $\underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

$$\text{Comme } \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \sqrt{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\begin{aligned}\text{et} \quad \exp\left(\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) &\underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\end{aligned}$$

On pose $X \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. On a bien : $X \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

De plus, $X \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ donc un $\underset{0}{o}(X^2)$ est un $\underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

$$\exp\left(\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On revient à $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x\left(x+\frac{1}{2x}-\frac{9}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x+\frac{1}{2}-\frac{9}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que : $\underbrace{f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)}_{\text{noté } \Delta(x)} \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{9}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc $\Delta(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{9}{8x}$.

On en tire que :

- $\Delta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\boxed{\text{la droite } \mathcal{D} \text{ d'équation } y=x+\frac{1}{2} \text{ est asymptote à la courbe } \mathcal{C} \text{ de } f \text{ en } +\infty.}$
- $\Delta(x)<0$ au voisinage de $+\infty$, donc, $\boxed{\text{localement, } \mathcal{C} \text{ est en-dessous de } \mathcal{D}.}$

Exercice 2

1°) a) Soit $n\geq 1$. g_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables et, pour tout $x>0, g_n'(x)=e^x+\frac{1}{nx^2}>0$.
g_n est continue et est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.
Donc, g_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]\lim\limits_{x\to0} g_n(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)[$ i.e. de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
0 est un réel donc 0 admet un unique antécédent u_n dans $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'équation } g_n(x)=0 \text{ admet une unique solution } u_n \text{ dans } \mathbb{R}_+^*}$.

b) Soit $n\geq 1$. $g_n(u_n)=0$ donc $e^{u_n}=\frac{1}{nu_n}$ soit encore, $\boxed{nu_n=e^{-u_n}}$.

2°) a) Soit $n\geq 1$. $g_{n+1}(u_n)=e^{u_n}-\frac{1}{(n+1)u_n}=\frac{1}{nu_n}-\frac{1}{(n+1)u_n}$ par définition de la suite u
Donc $g_{n+1}(u_n)=\frac{n+1-n}{n(n+1)u_n}=\frac{1}{n(n+1)u_n}$. Puisque $u_n>0$, il vient : $\boxed{g_{n+1}(u_n)>0}$.

b) Soit $n\geq 1$. Puisque $g_{n+1}(u_{n+1})=0$, il vient $g_{n+1}(u_n)>g_{n+1}(u_{n+1})$.
Comme g_{n+1} est croissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit que : $u_n>u_{n+1}$.
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante}}$.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers un réel } \ell}$.

d) Par l'absurde, on suppose que $\ell\neq 0$.
Comme la suite (u_n) est positive, on a nécessairement $\ell\geq 0$. Ainsi, $\ell>0$.
Pour tout $n\geq 1, nu_n=e^{-u_n}$ par 1.b.

D'une part, $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\ell > 0$. D'autre part, $e^{-u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\ell}$ par continuité de exp.

Ceci est absurde par unicité de la limite. Ainsi, $\boxed{\ell = 0}$.

Autre méthode (très rapide) : $\forall n \geq 1, u_n = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$. Or $e^{-u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\ell}$ et $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3°) a) Soit $n \geq 1$. Par 1.b, $nu_n = e^{-u_n}$.

Comme (u_n) converge vers 0 et $e^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, il vient $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

D'où $nu_n = 1 + o(1)$ soit encore $\boxed{u_n = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.

b) Soit $n \geq 1$. $nu_n = \exp(-u_n) = \exp\left(-\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Posons $X = -\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $X \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $X \sim -\dfrac{1}{n}$ donc un $o(X)$ est un $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

$e^X \underset{X\to 0}{=} 1 + X + o(X)$. Donc, $nu_n = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Finalement, $\boxed{u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$. Ainsi, $\boxed{\text{le réel } \alpha = -1 \text{ convient}}$.

4°) a) φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \varphi'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x > 0$.

Donc, φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, φ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

Donc, φ réalise une bijection de l'intervalle $\mathbb{R}_+$ dans $[\varphi(0), \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)[$.

Donc, $\boxed{\varphi \text{ réalise une bijection de l'intervalle } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}_+}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} x(1 + x + o(x))$. Donc $\boxed{\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^2 + o(x^2)}$.

c) $\varphi^{-1}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a$ et, par continuité de φ^{-1} en 0, on a aussi : $\varphi^{-1}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \varphi^{-1}(0)$.

Donc, par unicité de la limite, $\varphi^{-1}(0) = a$.

Or, $\varphi(0) = 0$ donc $\varphi^{-1}(0) = 0$. Ainsi, $\boxed{a = 0}$.

d) $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \underset{x\to 0}{=} \varphi^{-1}(x + x^2 + o(x^2))$.

On pose $X \underset{x\to 0}{=} x + x^2 + o(x^2)$. $X \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $X \underset{0}{\sim} x$ donc un $o(X^2)$ est un $o(x^2)$.

Avec le résultat de la question b, $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \underset{x\to 0}{=} b(x + x^2 + o(x^2)) + c(x + x^2 + o(x^2))^2 + o(x^2)$,

i.e. $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \underset{x\to 0}{=} bx + x^2(b+c) + o(x^2)$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$ donc $x \underset{x\to 0}{=} bx + x^2(b+c) + o(x^2)$.

Ce qui peut s'écrire : $0 + 0.x + 0.x^2 + o(x^2) \underset{x\to 0}{=} bx + x^2(b+c) + o(x^2)$.

Par unicité du développement limité à l'ordre 2 en 0, il vient : $\begin{cases} b = 1 \\ b + c = 0 \end{cases}$ d'où $\boxed{b = 1, c = -1}$.

e) Soit $n \geq 1$. $nu_n = e^{-u_n}$ donc $u_n e^{u_n} = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, $\varphi(u_n) = \dfrac{1}{n}$. Ce qui donne : $u_n = \varphi^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

$\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par 4d, $\varphi^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + o(x^2)$.

On en déduit que $\boxed{u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$.

Exercice 3

Partie 1

1°) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

2°) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - 2x$.

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\infty$

Justification des limites : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - x^2 = x(1-x)$ puis on conclut par produit.

b) f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ ie $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$ donc $0 \leq f(x) \leq 1$.

De même, on démontre que : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], 0 \leq f(x) \leq 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1], 0 \leq f(x) \leq 1}$.

Remarque : On dit que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.

c) On suppose que la suite (u_n) converge vers un réel β.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

D'une part, $u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \beta$.

D'autre part, $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(\beta)$ par continuité de f en β.

Ainsi, par unicité de la limite, $f(\beta) = \beta$ donc $\beta - \beta^2 = \beta$. D'où $\beta = 0$.

$\boxed{\text{Si } (u_n) \text{ converge vers un réel } \beta \text{ alors } \beta = 0.}$

3°) a) (u_n) est décroissante par 1 donc, par le théorème de la limite monotone, (u_n) converge ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Par l'absurde, supposons que (u_n) converge vers un réel. Alors, par 2c, (u_n) converge vers 0. Par décroissance de (u_n) alors : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n$. En particulier $0 \leq u_0$. Exclu puisque $u_0 = a < 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ diverge vers } -\infty}$.

b) Comme $a > 1$, $u_1 = f(u_0) = f(a) = a - a^2 = a(1-a) < 0$.

On se ramène alors au cas précédent : $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Si elle converge alors c'est vers 0. On a alors $0 \leq u_1$: exclu.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ diverge vers } -\infty}$.

c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}, H_n : 0 \leq u_n \leq 1$.

★ H_0 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie.
Alors $0 \leq u_n \leq 1$. Par 2b, $0 \leq f(u_n) \leq 1$ ie $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
Donc, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.

Par 1, (u_n) est décroissante. Comme (u_n) est minorée par 0, on en déduit, par le théorème de la limite monotone que (u_n) converge. Par 2c, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0.}$

Partie 2

4°) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{n+1-1}{(n+1)^2} = \dfrac{n}{(n+1)^2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+2} &\iff n(n+2) \leq (n+1)^2 \qquad \text{car } (n+1)^2 > 0 \text{ et } n+2 > 0 \\
&\iff n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1 \\
&\iff 0 \leq 1
\end{aligned}$$

$0 \leq 1$ donc $\dfrac{n}{(n+1)^2} \leq \dfrac{1}{n+2}$. Ainsi, $\boxed{f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n+2}}$.

b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n : 0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

★ $u_1 = f(u_0) = f(a)$.
Or d'après le tableau de variation de f, f a pour maximum $\dfrac{1}{4}$. On a donc $f(a) \leq \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2}$.
Par ailleurs, $f(a) = a(1-a) > 0$ puisque $a \in]0,1[$.
Donc $0 < u_1 \leq \dfrac{1}{2}$.
Ainsi, H_1 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que H_n est vraie. Montrons que H_{n+1} est vraie.
On a alors : $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
$n+1 \geq 2 > 0$ donc $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{2}$.
D'où, par stricte croissance de f sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $f(0) < f(u_n) \leq f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.
Par ce qui précède, $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n+2}$ donc, puisque $f(0) = 0$, $0 < u_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+2}$.
Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}}$.

5°) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= (n+1)u_{n+1} - nu_n \\
&= (n+1)(u_n - u_n^2) - nu_n \\
&= (n+1)u_n - (n+1)u_n^2 - nu_n \\
&= u_n - (n+1)u_n^2 \\
&= u_n(1 - (n+1)u_n)
\end{aligned}$$

Par 4b, on a : $u_n > 0$ et $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. Puisque $n+1 > 0$, $(n+1)u_n \leq 1$. Ainsi, $v_{n+1} - v_n \geq 0$.

$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ donc, puisque $n \geq 0$, $nu_n \leq \dfrac{n}{n+1}$ d'où $v_n \leq 1$.
La suite (v_n) est croissante et majorée par 1.
Donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(v_n) \text{ converge vers un réel } \ell.}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < v_n \leq 1$ donc, par passage à la limite $0 \leq \ell \leq 1$.
Ainsi, $\boxed{\ell \in [0,1]}$.

6°) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La suite (v_n) est croissante donc $v_k \geq v_1$ ie $ku_k \geq u_1$. Comme $k > 0$, $\boxed{u_k \geq \dfrac{u_1}{k}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$.

Pour tout $k \in \{n+1, \dots, 2n\}$, $0 < k \leq 2n$ donc $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{2n}$; comme $u_1 \geq 0$, $\dfrac{u_1}{k} \geq \dfrac{u_1}{2n}$, et grâce à la question précédente, $u_k \geq \dfrac{u_1}{2n}$.

En sommant de $k = n+1$ à $k = 2n$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{u_1}{2n} \\ &\geq ((2n-(n+1)+1)\frac{u_1}{2n} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_{2n} - S_n \geq \frac{u_1}{2}}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ par 4b.

La suite (S_n) est donc croissante.

Ainsi, par le théorème de la limite monotone, (S_n) converge ou (S_n) diverge vers $+\infty$.

Par l'absurde, supposons que (S_n) converge vers un réel ℓ.

La suite (S_{2n}) est une suite extraite de (S_n) donc elle converge aussi vers ℓ.

Ainsi, par différence, $S_{2n} - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or, par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} - S_n \geq \dfrac{u_1}{2}$.

Par passage à la limite, on obtient $0 \geq \dfrac{u_1}{2}$: exclu car $u_1 > 0$ par 4b.

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (S_n) \text{ diverge vers } +\infty}$.

7°) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

En reprenant le calcul effectué dans 5a : $v_{k+1} - v_k = u_k(1-(k+1)u_k) = u_k(1 - ku_k - u_k)$.

Ainsi, $v_{k+1} - v_k = u_k(1 - v_k - u_k)$.

La suite (v_n) est croissante et converge vers ℓ donc $v_k \leq \ell$.

Ainsi, $-v_k \geq -\ell$ puis $1 - v_k - u_k \geq 1 - \ell - u_k$.

Comme, par 4b, $u_k \geq 0$, il vient : $u_k(1 - v_k - u_k) \geq u_k(\ (1-\ell) - u_k\ )$.

Finalement, $\boxed{v_{k+1} - v_k \geq u_k\ (\ (1-\ell) - u_k\ )}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k+1})$ par définition de la suite u.

Ainsi, par téléscopage, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = u_1 - u_{n+1}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Par 7a, $v_{k+1} - v_k \geq u_k\ (\ (1-\ell) - u_k\ )$.

En sommant de $k = 1$ à $k = n$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(v_{k+1} - v_k) \geq \sum_{k=1}^{n} u_k\ (\ (1-\ell) - u_k\ )$.

D'une part, par téléscopage, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_1$.

D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\ (\ (1-\ell) - u_k\ ) = (1-\ell)\sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k^2 = (1-\ell)S_n + u_{n+1} - u_1$.

Ainsi, $v_{n+1} - v_1 \geq (1-\ell)S_n + u_{n+1} - u_1$.

Finalement, $\boxed{v_{n+1} \geq (1-\ell)S_n + u_{n+1}}$ car $v_1 = u_1$.

d) Par l'absurde, supposons $\ell \neq 1$. Comme $\ell \in [0,1]$ par 5b, on a donc : $\ell < 1$.

$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $1-\ell > 0$ donc $(1-\ell)S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Comme (u_n) converge vers 0, $S_n(1-\ell) + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Or, par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} \geq (1-\ell)S_n + u_{n+1}$.

On en déduit que $v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Exclu puisque la suite (v_n) converge.

Ainsi, $\boxed{\ell = 1}$.

8°) La suite (v_n) converge vers 1 donc $v_n = 1 + o(1)$.

Ainsi, $nu_n = 1 + o(1)$ puis $u_n = \dfrac{1+o(1)}{n}$. Ainsi, $\boxed{u_n = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.

Exercice 4

Partie 1 : Notion d'involution

1°) Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{array}$ ie $\varphi = -\operatorname{id}_{\mathbb{R}}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}, \varphi(\varphi(x)) = \varphi(-x) = x$.

Ainsi, $\varphi \circ \varphi = \operatorname{id}_{\mathbb{R}}$ donc $\boxed{\varphi \text{ est une involution de } \mathbb{R}}$.

2°) Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$. Alors, $\varphi \circ \varphi = \operatorname{id}_{\mathbb{R}_+^*}$: $\boxed{\varphi \text{ est une involution de } \mathbb{R}_+^*}$.

3°) Soit φ une involution de I. Alors, $\varphi \circ \varphi = \operatorname{id}_I$.

En posant $\psi = \varphi$, on a les égalités : $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \operatorname{id}_I$.

Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est bijective}}$ et $\varphi^{-1} = \psi = \varphi$.

Partie 2 : Quelques propriétés des fonctions de $\mathcal{E}$

4°) Soit deux réels y_1 et y_2 strictement positifs tels que $f(y_1) = f(y_2)$. Montrons que $y_1 = y_2$.

En utilisant (a) avec 1 et y_1 : $f(1f(y_1)) = y_1 f(1)$ ie $f(f(y_1)) = y_1 f(1)$.

De même, $f(1f(y_2)) = y_2 f(1)$ donc $f(f(y_2)) = y_2 f(1)$.

$f(y_1) = f(y_2)$ donc $f(f(y_1)) = f(f(y_2))$. Ainsi, $y_1 f(1) = y_2 f(1)$, ce qui s'écrit : $f(1)(y_1 - y_2) = 0$.

Or f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $f(1) \neq 0$. Ainsi, $y_1 = y_2$.

$\boxed{f \text{ est donc injective.}}$

5°) En utilisant (a) avec $x = y = 1$: $f(1f(1)) = 1f(1) = f(1)$. On a donc $f(f(1)) = f(1)$.

Comme f est injective, il vient $\boxed{f(1) = 1}$.

6°) Soit $x > 0$. En utilisant (a) avec 1 et x : $f(1f(x)) = xf(1)$. Puisque $f(1) = 1$, il vient : $f(f(x)) = x$.

Ainsi, $f \circ f = \operatorname{id}_{\mathbb{R}_+^*}$: $\boxed{f \text{ est une involution de }]0,+\infty[}$.

7°) Soit x et y deux réels strictement positifs.

En utilisant (a) avec x et $f(y)$: $f(xf(f(y))) = f(y)f(x)$.

Comme f est une involution, $f(f(y)) = y$ donc $\boxed{f(xy) = f(x)f(y)}$.

Partie 3 : Détermination de l'ensemble $\mathcal{E}$

8°) a) $f(1) = 1$ donc $1 \in F$. Ainsi, $\boxed{F \neq \varnothing}$.

b) Soit $x > 0$. En utilisant (a) avec x et $y = x$: $f(xf(x)) = xf(x)$. Donc, $\boxed{xf(x) \in F}$.

c) Soit x et y des éléments de F. Alors, $f(x) = x$ et $f(y) = y$.

En utilisant la question 7, on obtient que $f(xy) = f(x)f(y) = xy$. Donc, $\boxed{xy \in F}$.

En utilisant à nouveau la question 7 avec x et $\frac{1}{x}$, on obtient que $f\left(x\frac{1}{x}\right) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$, i.e. $1 = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ puisque 1 et x sont dans F. Ainsi, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$. Donc, $\boxed{\frac{1}{x} \in F}$.

d) Soit $x \in F$ ie $f(x) = x$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : x^n \in F$.

★ Pour $n = 0$: $x^0 = 1$ et $1 \in F$ donc H_0 est vraie.

★ On suppose que H_n est vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$. Alors $x^n \in F$ par H_n et $x \in F$, donc par la question précédente, $x^n x = x^{n+1} \in F$.
H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x^n \in F}$.

e) Soit $x \in F$. Par l'absurde, supposons $x > 1$. Alors, $x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par (b), il existe un réel A tel que, pour tout $u > 1, f(u) \leq A$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, x^n > 1$ donc $f(x^n) \leq A$.

Or $x \in F$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, x^n \in F$ par 8d. Ainsi, $f(x^n) = x^n$ donc $x^n \leq A$.

Ainsi, (x^n) est une suite majorée par A. Ceci est exclu puisque $x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On en déduit que $\boxed{x \leq 1}$.

f) On procède par double inclusion.

★ On sait déjà que $1 \in F$.

★ Réciproquement, soit $x \in F$. Montrons que $x = 1$.
Par la question précédente, $x \leq 1$.
D'autre part, $x \in F$ donc, par 8c, $\frac{1}{x} \in F$.
Ainsi, par la question précédente, $\frac{1}{x} \leq 1$. Comme $x > 0$, il vient $x \geq 1$.
On en déduit que $x = 1$.

Finalement $\boxed{F = \{1\}}$.

g) Soit $x > 0$. Par 8b, $xf(x) \in F$. Or $F = \{1\}$ donc $xf(x) = 1$. Ainsi, $f(x) = \frac{1}{x}$.

$\boxed{f \text{ est la fonction } x \mapsto \frac{1}{x}}$.

9°) ★ Soit $f \in \mathcal{E}$. Alors, par ce qui précède, f est la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$.

★ Réciproquement, soit f la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$. Montrons que $f \in \mathcal{E}$.

f va de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Vérifions (a) et (b).

Soit x et y deux réels strictement positifs. $f(xf(y)) = f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y}{x} = yf(x)$.

Donc (a) est vraie.

$\forall x > 1, f(x) = \frac{1}{x} \leq 1$: ainsi, f est majorée sur $]1, +\infty[$. Donc (b) est vraie.

On en déduit que $\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \text{ est le seul élément de } \mathcal{E}}$.