Devoir surveillé 4.

Samedi 18 janvier 2025, de 7h45 à 11h45.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d'encadrer ou de souligner les résultats, et de laisser une ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

1°) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1+e^{2x}}{\cos x + \sin x}$.

2°) Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x}\exp\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$.

Montrer que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ que l'on déterminera. On étudiera les positions relatives.

Exercice 2

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction g_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g_n(x) = e^x - \frac{1}{nx}.$$

1°) **a)** Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $g_n(x) = 0$ possède une unique solution u_n dans $]0, +\infty[$.

b) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $nu_n = e^{-u_n}$.

2°) **a)** Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $g_{n+1}(u_n) > 0$.

b) En déduire que la suite (u_n) est strictement décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

d) Montrer que $\ell = 0$.

3°) **a)** Montrer que $u_n = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

b) À l'aide de 1b, montrer qu'il existe un réel α que l'on déterminera tel que :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4°) *Une autre approche*

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = xe^x$.

a) Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de φ en 0.

c) On admet que φ^{-1} admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

On note $\varphi^{-1}(y) \underset{y \to 0}{=} a + by + cy^2 + o(y^2)$ où a, b, c sont des réels.

Préciser la valeur de a.

d) En déterminant le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\varphi^{-1}(\varphi(x))$, déterminer les valeurs de b et c.

e) Retrouver, à l'aide de ce qui précède, le résultat de 3b.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Partie 1

1°) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2°) On note f la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - x^2 \end{array}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Justifier : $\forall x \in [0,1],\ 0 \leq f(x) \leq 1$.

c) On suppose que la suite (u_n) converge. Déterminer sa limite.

3°) **a)** On suppose que $a < 0$. Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

b) On suppose que $a > 1$. À l'aide du signe de u_1, déterminer la limite de (u_n).

c) On suppose que $a \in [0,1]$. Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

Partie 2

On suppose désormais que $a \in\ ]0,1[$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = nu_n \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

4°) **a)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n+2}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

5°) **a)** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ.
Justifier $\ell \in [0,1]$.

6°) **a)** Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k \geq \dfrac{u_1}{k}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n} - S_n \geq \dfrac{u_1}{2}$.

c) Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

7°) **a)** Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ v_{k+1} - v_k \geq u_k\ (\ (1-\ell) - u_k\ )$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = u_1 - u_{n+1}$.

c) Déduire des 2 questions précédentes que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} \geq (1-\ell)S_n + u_{n+1}$.

d) En déduire que $\ell = 1$.

8°) Justifier que : $u_n = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 4

On cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des applications f définies sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et vérifiant les 2 propositions suivantes :

(a) : Pour tous réels x et y strictement positifs, $f(xf(y)) = yf(x)$.

(b) : f est majorée sur $]1, +\infty[$: il existe un nombre réel A tel que pour tout réel $x > 1$, $f(x) \leq A$.

Partie 1 : Notion d'involution

Soit I un intervalle et φ une application définie sur I à valeurs dans I.
On dit que φ est une involution de I si et seulement si $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_I$.
Ce qui signifie que, pour tout $x \in I$, $\varphi(\varphi(x)) = x$.

1°) Donner un exemple d'involution de $\mathbb{R}$ autre que la fonction identité de $\mathbb{R}$.

2°) Donner un exemple d'involution de $]0, +\infty[$ autre que la fonction identité de $]0, +\infty[$.

3°) Montrer qu'une involution de I est bijective.

Partie 2 : Quelques propriétés des fonctions de $\mathcal{E}$

Dans cette partie, on suppose que $f \in \mathcal{E}$ c'est-à-dire :

$$f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[\text{ et } f \text{ vérifie les conditions } (a) \text{ et } (b).$$

4°) Montrer que f est injective.

5°) En déduire que $f(1) = 1$.

6°) Montrer que f est une involution de $]0, +\infty[$.

7°) Soit x et y deux réels strictement positifs. Montrer que $f(xy) = f(x)f(y)$.

Partie 3 : Détermination de l'ensemble $\mathcal{E}$

8°) Dans cette question, on suppose que $f \in \mathcal{E}$.

On note F l'ensemble des points fixes de f :

$$F = \{x \in]0, +\infty[\ / \ f(x) = x\}$$

a) Justifier que $F \neq \varnothing$.

b) Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $xf(x) \in F$.

c) Soit x et y des éléments de F. Montrer que xy et $\dfrac{1}{x}$ sont des éléments de F.

d) Soit x un élément de F. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^n \in F$.

e) Montrer que si x est un élément de F alors $x \leq 1$.
Indication : on pourra considérer la suite (x^n) et raisonner par l'absurde.

f) Montrer que $F = \{1\}$.

g) En déduire f.

9°) Conclure.