Correction du devoir surveillé 3.

Exercice 1

Soit u et v les fonctions de classe C^1 suivantes :
Pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$u(x) = \ln(1-\cos(x)) \qquad u'(x) = \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$$
$$v(x) = \sin(x) \qquad v'(x) = \cos(x)$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
I &= [\sin(x)\ln(1-\cos(x))]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= 1\times\ln(1-0) - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2(x)}{1-\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\ln(2) - [x+\sin(x)]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\ln(2) - \left(\frac{\pi}{2}+1-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{3}}{2}(\ln(2)+1) - \frac{\pi}{6} - 1}$$

Exercice 2

1°) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}$ est continue sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ donc on peut calculer son intégrale sur tout segment inclus dans $]-1,+\infty[$. Or, pour tout $x > 0$, le segment de bornes x et $\dfrac{1}{x}$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ donc dans $]-1,+\infty[$ donc $\boxed{\varphi(x) \text{ existe}}$.

2°) a) Soit $x > 0$.

★ On pose : $u = \dfrac{1}{t}$. $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

★ On note : $\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

★ $\begin{cases} \text{Si } t = \dfrac{1}{x} \text{ alors } u = x \\ \text{Si } t = x \text{ alors } u = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{\left(\frac{1}{t}+1\right)^2(t^2+1)}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\int_{x}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{(u+1)^2\left(\frac{1}{u^2}+1\right)}\,\mathrm{d}u \\
&\qquad\qquad \text{par le théorème de changement de variables} \\
&= \boxed{\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{u^2}{(1+u)^2(1+u^2)}\;du}
\end{aligned}$$

b) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\varphi(x)+\varphi(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t^2}{(t+1)^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t^2+1}{(t+1)^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{t+1}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} \\
&= -\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \\
&= \frac{x-1}{x+1}
\end{aligned}$$

c) On en déduit que, pour tout $x > 0$, $\boxed{\varphi(x) = \dfrac{x-1}{2(x+1)}}$.

3°) a) Pour $x > 0, \varphi(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ de primitive F et que x et $\dfrac{1}{x}$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\varphi(x) = [F(t)]_{\frac{1}{x}}^{x} \text{ donc } \boxed{\varphi(x) = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)}$$

b) Par somme et composition de fonctions dérivables, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout

$x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= F'(x) - \left(\frac{-1}{x^2}\right) F'\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= f(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} + \frac{1}{x^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2 \left(\left(\frac{1}{x}\right)^2+1\right)} \\
&= \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} + \frac{1}{x^2} \frac{1}{\left(\frac{1+x}{x}\right)^2 \left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)} \\
&= \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} + \frac{x^2}{(1+x)^2(1+x^2)} \\
&= \frac{1+x^2}{(1+x)^2(1+x^2)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}}$$

c) On reconnaît la dérivée de $x \mapsto \dfrac{-1}{x+1}$. Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, il existe une constante C telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\varphi(x) = \frac{-1}{x+1} + C.$$

Or $\varphi(1) = \displaystyle\int_1^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, donc $-\dfrac{1}{2} + C = 0$ d'où $C = \dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x > 0,\ \varphi(x) = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{2}.}$$

C'est aussi $\dfrac{-2+x+1}{2(x+1)} = \boxed{\dfrac{x-1}{2(x+1)}}$.

4°) a) Soient a, b, c des réels. Soit $t \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{t+1} + \frac{b}{(t+1)^2} + \frac{ct}{t^2+1} &= \frac{a(t+1)(t^2+1) + b(t^2+1) + ct(t+1)^2}{(t+1)^2(t^2+1)} \\
&= \frac{a(t^3+t^2+t+1) + b(t^2+1) + c(t^3+2t^2+t)}{(t+1)^2(t^2+1)} \\
&= \frac{t^3(a+c) + t^2(a+b+2c) + t(a+c) + a + b}{(t+1)^2(t^2+1)}
\end{aligned}$$

Pour que $f(t) = \dfrac{t^3(a+c) + t^2(a+b+2c) + t(a+c) + a + b}{(t+1)^2(t^2+1)}$, il <u>suffit</u> que :

$$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b+2c=0 \\ a+b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a+c=0 \\ c=-\dfrac{1}{2} \\ a+b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \\ c=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $t \geq 0$, $\boxed{f(t) = \dfrac{1}{2(t+1)} + \dfrac{1}{2(t+1)^2} - \dfrac{t}{2(t^2+1)}}$.

Les réels $\boxed{a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{1}{2}, c = -\dfrac{1}{2}}$ conviennent.

b) Pour tout $t \geq 0$, $f(t) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{t+1} - \dfrac{-1}{(t+1)^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{2t}{t^2+1}\right]$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ est donc :

$$F : t \mapsto \frac{1}{2}\left[\ln\left(|t+1|\right) - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}\ln\left(|t^2+1|\right)\right]$$

Or, lorsque $t \in \mathbb{R}_+$, $t+1 > 0$ $t^2+1 > 0$ donc on peut prendre :

$$\boxed{F : t \mapsto \frac{1}{2}\left(\ln(t+1) - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right)}$$

c) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln\left(\frac{1}{x}+1\right) + \frac{1}{\frac{1}{x}+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(-\frac{1}{x+1} + \frac{x}{1+x} + \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln(1+x) + \ln(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln(x^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1} + \ln x - \frac{1}{2} \times 2\ln x\right) \qquad \text{car } x > 0 \\
&= \boxed{\frac{x-1}{2(x+1)}}
\end{aligned}$$

5°) a) Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
On a $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ donc $\dfrac{\pi}{2} > \dfrac{\pi}{2} - \alpha > 0$. Or sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, $\theta \mapsto 1 + \sin(2\theta)$ ne s'annule pas car sin est positive sur $[0, \pi]$. Ainsi $\theta \mapsto \dfrac{\cos^2(\theta)}{1+\sin(2\theta)}$ est bien définie $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Par ailleurs, par somme, produit et quotient de fonctions continues, $\theta \mapsto \dfrac{\cos^2(\theta)}{1+\sin(2\theta)}$ est continue là où elle est définie, en particulier elle est continue sur le segment de bornes α et $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$. Ainsi $\boxed{I(\alpha) \text{ est bien définie}}$.

b) Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

★ On pose : $t = \tan\theta$, $\theta \mapsto \tan\theta$ est de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ donc sur le segment formé par α et $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$.

★ $\mathrm{d}t = (1 + \tan^2(\theta))\,\mathrm{d}\theta$

★ $\begin{cases} \theta = \alpha \implies t = \tan(\alpha) \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha \implies t = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\tan(\alpha)} \end{cases}$ (car $\cos\alpha \neq 0$).

Pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\begin{aligned}
\frac{\cos^2(\theta)}{1+\sin(2\theta)} &= \frac{\cos^2(\theta)}{1+2\sin(\theta)\cos(\theta)} \\
&= \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\theta)}+2\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}} \\
&= \frac{1}{1+\tan^2(\theta)+2\tan(\theta)} \\
&= \frac{1}{(1+\tan(\theta))^2} \\
&= \frac{1+\tan^2(\theta)}{(1+\tan(\theta))^2\,(1+\tan^2(\theta))}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
I(\alpha) &= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{1}{(1+\tan(\theta))^2\,(1+\tan^2(\theta))}\left(1+\tan^2(\theta)\right)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\tan(\alpha)}^{\frac{1}{\tan(\alpha)}} \frac{1}{(1+t)^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\varphi\left(\tan(\alpha)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{I(\alpha) = \frac{1-\tan(\alpha)}{2\left(\tan(\alpha)+1\right)}} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan(\alpha)}{2\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\alpha\right)\right)} = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

Exercice 3

Partie 1 : préliminaires

1°) Soit $x \in\,]-1,1[$. $\left(\cos\left(\text{Arcsin}(x)\right)\right)^2 = 1-\left(\sin\left(\text{Arcsin}(x)\right)\right)^2 = 1-x^2$.
Or $\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et cos est positive sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\boxed{\cos\left(\text{Arcsin}(x)\right) = \sqrt{1-x^2}}$.
Par ailleurs, comme $x \in\,]-1,1[$, par stricte croissance de Arcsin, on a $\text{Arcsin}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\tan\left(\text{Arcsin}(x)\right)$ est bien défini, et :

$$\tan\left(\text{Arcsin}(x)\right) = \frac{\sin\left(\text{Arcsin}(x)\right)}{\cos\left(\text{Arcsin}(x)\right)}$$

$$\boxed{\tan\left(\text{Arcsin}(x)\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

2°) a) $(F_0) \iff \forall x \in]-1,1[,\ y'(x)+\dfrac{x}{1-x^2}y(x) = 0.$
Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.

On cherche une primitive ψ de $x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{1-x^2}$ sur $]-1,1[$.
Par exemple, pour tout $x \in]-1,1[, \psi(x) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(|1-x^2|\right) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)$.
Donc, $\exp(-\psi(x)) = \exp\left(\dfrac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)\right) = \exp\left(\ln(\sqrt{1-x^2})\right) = \sqrt{1-x^2}$,
Donc $\boxed{\text{les solutions de } (F_0) \text{ sur }]-1,1[\text{ sont les fonctions : } x \mapsto \lambda\sqrt{1-x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$.

b) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ est continue sur l'intervalle $]-1,1[$ donc la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$ est l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0.
Fixons $x \in]-1,1[$ et calculons $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$.
On pose $u = \sin(t)$. $t \mapsto \sin(t)$ est de classe C^1 sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
On note : $du = \cos(t)\,dt$.
On a $u = 0$ lorsque $t = 0$, et $u = x$ lorsque $t = \text{Arcsin}(x)$ (car $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$).
Par le théorème du changement de variables,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^{\text{Arcsin}(x)} \frac{1}{(1-\sin^2 t))^{\frac{3}{2}}} \cos t\,dt = \int_0^{\text{Arcsin}(x)} \frac{1}{(\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \cos t\,dt \\
&= \int_0^{\text{Arcsin}(x)} \frac{1}{\cos^2 t\sqrt{\cos^2 t}} \cos t\,dt = \int_0^{\text{Arcsin}(x)} \frac{1}{\cos t|\cos t|}\,dt \\
&= \int_0^{\text{Arcsin}(x)} \frac{1}{\cos t \times \cos t}\,dt \qquad \text{car } \cos t > 0 \text{ sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\
&= \int_0^{\text{Arcsin}(x)} \frac{1}{\cos^2 t}\,dt \\
&= [\tan(t)]_0^{\text{Arcsin}(x)} \\
&= \tan(\text{Arcsin}(x)) - \tan(0) \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{une primitive de } x \mapsto \dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ sur }]-1,1[\text{ est } x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$.

c) $(F_C) \iff \forall x > 0, y'(x) + \dfrac{x}{1-x^2}y(x) = \dfrac{C}{1-x^2}$.
Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont (F_0) est l'équation homogène associée. Cherchons une solution particulière par la méthode de la variation de la constante.
On pose $y : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda(x)\sqrt{1-x^2} \end{array}$ où $\lambda :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable.
Comme $x \mapsto 1-x^2$ est dérivable et strictement positive sur $]-1,1[$ et que $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1,1[$. Par produit, y est dérivable sur $]-1,1[$.
Pour tout $x \in]-1,1[$, $y'(x) = \lambda'(x)\sqrt{1-x^2} + \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\lambda(x) = \lambda'(x)\sqrt{1-x^2} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\lambda(x)$

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (F_C) \text{ sur }]-1,1[\\
\iff & \forall x \in]-1,1[,\ \lambda'(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\lambda(x) + \frac{x}{1-x^2}\lambda(x)\sqrt{1-x^2} = \frac{C}{1-x^2} \\
\iff & \forall x \in]-1,1[,\ \lambda'(x)\sqrt{1-x^2} = \frac{C}{1-x^2} \\
\iff & \forall x \in]-1,1[,\ \lambda'(x) = \frac{C}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{car } x \mapsto 1-x^2 \text{ ne s'annule pas sur }]-1,1[
\end{aligned}$$

Grâce à la question précédente, on peut dire que $\lambda : x \mapsto \dfrac{Cx}{\sqrt{1-x^2}}$ convient.
$y : x \mapsto Cx$ est donc une solution particulière de (F_C).
Donc $\boxed{\text{les solutions de } (F_C) \text{ sur }]-1,1[\text{ sont les fonctions} : x \mapsto Cx + \lambda\sqrt{1-x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$.

3°) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- L'équation homogène associée est (G_0) : $z'' + z = 0$.
  Son équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, dont les racines sont i et $-i$. Elles se mettent sous la forme $0 \pm i$ donc les solutions réelles de (G_0) sont les
  $$t \mapsto e^{0.t}\left(\lambda\cos(t) + \mu\sin(t)\right) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t), \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$
- $(G) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) + z(t) = \mathrm{Im}(\frac{1}{2}e^{i2t})$.
  Posons alors l'équation (G') : $z''(t) + z(t) = \frac{1}{2}e^{i2t}$.
  Si z est solution de (G') alors $\mathrm{Im}(z)$ est solution de (G).
  Comme $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on pose $z : t \mapsto Ae^{i2t}$ où $A \in \mathbb{C}$.
  z est alors deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,
  $$\begin{aligned} z(t) &= Ae^{i2t} && \times 1 \\ z'(t) &= 2iAe^{i2t} && \times 0 \\ z''(t) &= -4e^{i2t} && \times 1 \end{aligned}$$
  $$\begin{aligned} z \text{ solution de } (G') &\iff \forall\, t \in \mathbb{R},\ Ae^{i2t}(-4+1) = \frac{1}{2}e^{i2t} \\ &\iff -3A = \frac{1}{2} \quad \text{car pour tout } t \in \mathbb{R},\ e^{i2t} \neq 0 \\ &\iff A = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$
  Donc $z : t \mapsto -\frac{1}{6}e^{i2t}$ est solution particulière de (G').
  On en déduit que $\mathrm{Im}(z)$, c'est-à-dire $t \mapsto -\frac{1}{6}\sin(2t)$, est une solution de (G).
- Finalement, les solutions de (G) (définies sur $\mathbb{R}$) sont les fonctions :
  $$\boxed{t \mapsto -\frac{1}{6}\sin(2t) + \lambda\cos(t) + \mu\sin(t), \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}$$

Partie 2 : résolutions d'équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants

4°) Comme y est deux fois dérivable sur $]-1,1[$, y' est dérivable sur cet intervalle.
v est dérivable sur $]-1,1[$ comme somme et produit de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in\ ]-1,1[$,
$$\begin{aligned} v'(x) &= -2xy'(x) + (1-x^2)y''(x) + y(x) + xy'(x) \\ &= (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_0) \text{ sur }]-1,1[&\iff \forall\, x \in\ ]-1,1[,\ v'(x) = 0 \\ &\iff \exists\, C \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in\ ]-1,1[,\ v(x) = C \text{ car }]-1,1[\text{ est un intervalle} \\ &\iff \exists\, C \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in\ ]-1,1[,\ (1-x^2)y'(x) + xy(x) = C \\ &\iff \exists\, C \in \mathbb{R},\ y \text{ solution de } (F_C) \\ &\iff \exists\, C \in \mathbb{R},\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in\ ]-1,1[,\ y(x) = Cx + \lambda\sqrt{1-x^2} \\ &\qquad \text{d'après la question 2 de la partie 1} \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions de (E_0) sur $]-1,1[$ est donc
$$\boxed{\left\{x \mapsto \lambda\sqrt{1-x^2} + \mu x \ /\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

5°) a) • Pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(t) \in]-1,1[$. De plus y est définie sur $]-1,1[$ donc $\boxed{z \text{ est bien définie}}$.

• Par composition de fonctions deux fois dérivables, $\boxed{z \text{ est deux fois dérivable sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$.

• Pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned} z(t) &= y(\sin t) && \times 1 \\ z'(t) &= \cos t \; y'(\sin t) && \times 0 \\ z''(t) &= \cos^2 t \; y''(\sin t) - \sin t \; y'(\sin t) && \times 1 \end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-1,1[\\ \iff & \forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = x\sqrt{1-x^2} \\ \iff & \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ (1-\sin^2 t)y''(\sin t) - \sin t \; y'(\sin t) + y(\sin t) = \sin t \; \sqrt{1-\sin^2 t} \\ & \text{car la fonction sin réalise une bijection de }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ dans }]-1,1[\\ \iff & \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \cos^2 t \; y''(\sin t) - \sin t \; y'(\sin t) + y(\sin t) = \sin t \; \sqrt{\cos^2 t} \\ \iff & \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ z''(t) + z(t) = \sin t \; \cos t \quad \text{car cos est positive sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \iff & \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ z''(t) + z(t) = \frac{\sin(2t)}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{y \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-1,1[\iff z \text{ solution sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ de } (G)}$.

c) On en déduit, à l'aide de la question 3 de la partie 1 :

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-1,1[\\ \iff & \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ y(\sin(t)) = -\frac{1}{6}\sin(2t) + \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) \\ \iff & \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ y(\sin(t)) = -\frac{1}{3}\sin(t)\cos(t) + \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) \end{aligned}$$

Or la fonction sin réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $]-1,1[$ donc :

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-1,1[\\ \iff & \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in]-1,1[,\ y(x) = -\frac{1}{3}x\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) + \lambda\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) + \mu x \\ \iff & \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in]-1,1[,\ y(x) = -\frac{1}{3}x\sqrt{1-x^2} + \lambda\sqrt{1-x^2} + \mu x \quad \text{(c.f. question 1 partie 1} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur $]-1,1[$ est donc :

$$\boxed{\left\{ x \mapsto -\frac{1}{3}x\sqrt{1-x^2} + \lambda\sqrt{1-x^2} + \mu x \ / \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

(E_0) est l'équation homogène associée à (E), et on reconnaît la structure attendue de la forme générale des solutions de (E) : c'est la forme générale des solutions de (E_0) plus une solution particulière, ici $x \mapsto -\frac{1}{3}x\sqrt{1-x^2}$.