Devoir surveillé 3.

Samedi 30 novembre 2024, de 7h45 à 11h45.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de souligner les résultats, et de laisser une* ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

En effectuant une intégration par parties, calculer

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ln(1-\cos(x))\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2

On considère $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$.

Les questions 2, 3 et 4 doivent être traitées de façon indépendante.

1°) Existence de $\varphi(x)$

On pose $f : t \mapsto \dfrac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}$.

Soit $x > 0$. Justifier que $\varphi(x)$ existe.

2°) Méthode 1 : Calcul de $\varphi(x)$

a) Soit $x > 0$. Effectuer le changement de variables $u = \dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale $\varphi(x)$.

b) En déduire une simplification, pour $x > 0$, de $\varphi(x) + \varphi(x)$.

c) En déduire $\varphi(x)$ pour tout $x > 0$.

3°) Méthode 2 : Calcul de $\varphi(x)$

On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ (*on ne cherchera pas à calculer une telle primitive*).

a) Soit $x > 0$. Exprimer $\varphi(x)$ en fonction de F.

b) Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; calculer et simplifier $\varphi'(x)$ pour tout $x > 0$.

On trouvera que pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

c) En déduire $\varphi(x)$ pour tout $x > 0$.

4°) Méthode 3 : Calcul de $\varphi(x)$

a) Montrer qu'il existe des constantes a, b, c que l'on déterminera telles que :

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{(t+1)^2} + \frac{ct}{t^2+1}.$$

b) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.

c) En déduire $\varphi(x)$ pour tout $x > 0$.

5°) Application

On pose, pour $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $I(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\cos^2(\theta)}{1+\sin(2\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

a) Justifier l'existence de $I(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) À l'aide du changement de variable $t = \tan\theta$, calculer $I(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 3

Pour toutes les équations de cet exercice, on cherche les solutions à valeurs réelles.

Partie 1 : Préliminaires

1°) Pour tout $x \in]-1,1[$, montrer que $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$, que $\tan(\mathrm{Arcsin}(x))$ existe et que $\tan(\mathrm{Arcsin}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2°) **a)** Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle :

$$(F_0) \ : \ (1-x^2)y'(x) + xy(x) = 0.$$

b) En posant $u = \sin(t)$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$ pour $x \in]-1,1[$, montrer que $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est une primitive sur $]-1,1[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

c) Soit C un réel fixé. On note :

$$(F_C) \ : \ (1-x^2)y'(x) + xy(x) = C.$$

Résoudre (F_C) sur $]-1,1[$.
Pour déterminer une solution particulière de (F_C), on mettra en œuvre la méthode de variation de la constante.

3°) Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(G) \ : \ z''(t) + z(t) = \frac{\sin(2t)}{2}.$$

Partie 2 : Résolutions d'équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants

On veut résoudre les équations différentielles suivantes sur $]-1,1[$:

$$(E_0) \ : (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$$
$$(E) \ : (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = x\sqrt{1-x^2}.$$

On propose deux méthodes indépendantes.

4°) *Méthode 1, pour (E_0)*
Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]-1,1[$. On pose, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$v(x) = (1-x^2)y'(x) + xy(x).$$

Justifier que v est dérivable et calculer v'.
Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (E_0) sur $]-1,1[$.

5°) *Méthode 2, pour* (E)

a) Soit $y\ :\ ]-1,1[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]-1,1[$.
On définit z sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ z(t) = y(\sin t).$$

Justifier que z est bien définie et deux fois dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.
Exprimer $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y' et y'' et t pour tout $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que y est solution de (E) sur $]-1,1[$ si et seulement si z est solution de (G) sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).
Comparer à l'ensemble des solutions obtenu pour (E_0) et commenter.

$*****$ FIN $*****$