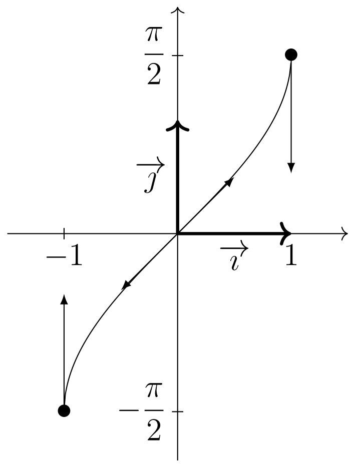
Correction du devoir surveillé 2.

Exercice 1

1°) Allure de la courbe de Arcsin :



2°) Arcsin est définie sur $[-1,1]$. On résout alors, pour $x \in [-1,1]$:

$$\begin{aligned} -1 \leq 1-2x^2 \leq 1 &\iff -1 \leq 2x^2-1 \leq 1 \\ &\iff 0 \leq 2x^2 \leq 2 \\ &\iff 0 \leq x^2 \leq 1 \\ &\iff -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est bien définie sur } D=[-1,1]}$.

3°) $\boxed{f \text{ est continue sur } D \text{ comme somme et composée de fonctions continues.}}$

4°) Arcsin n'est dérivable que sur $]-1,1[$. On résout alors, pour $x \in]-1,1[$, les équations :

$$1-2x^2=1 \iff x=0 \qquad ; \qquad 1-2x^2=-1 \iff 2x^2=2 \iff x=1 \text{ ou } x=-1$$

Ainsi, sur $D' = D \setminus \{-1,0,1\}$, la fonction $x \mapsto 1-2x^2$ est dérivable et à valeurs dans $]-1,1[$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est au moins dérivable sur } D' = D \setminus \{-1,0,1\}}$ comme somme et composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in D'$,

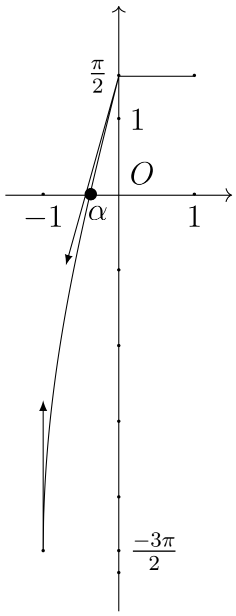
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 4x\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{4x^2-4x^4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{|x|\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1[\\ \dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]-1,0[\end{cases}}$.

5°) Pour tout $x \in]0,1[, f'(x) = 0$ et $]0,1[$ est un intervalle, donc f est constante sur $]0,1[$.
Comme f est continue sur $[0,1]$, on en déduit que f est constante sur $[0,1]$.
De plus, $f(0) = \text{Arcsin}(1) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\boxed{f \text{ est constante sur } [0,1] \text{ égale à } \dfrac{\pi}{2}}$.

6°) Soit $x \in]-1,0[, f'(x) = 4\,\text{Arcsin}'(x)$. De plus $]-1,0[$ est un intervalle.
Donc, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in]-1,0[, f(x) = 4\,\text{Arcsin}(x) + c$.
Comme f et Arcsin sont continues sur $[-1,0]$, cette égalité est encore vraie sur l'intervalle $[-1,0]$. Pour déterminer la constante, on pose $x = 0$.
$f(0) = \text{Arcsin}(1) = \dfrac{\pi}{2} = c$. Donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in [-1,0], f(x) = 4\,\text{Arcsin}(x) + \dfrac{\pi}{2}}$.

7°) Allure de la courbe de f :



$\forall x \in [-1,0], f(x) = 4\,\text{Arcsin}(x) + \dfrac{\pi}{2}$.
Il y a une tangente verticale au point d'abscisse -1.
Il y a une demi-tangente verticale de pente 4 au point d'abscisse 0.

8°) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-1,0]$, et $[-1,0]$ est un intervalle.
Donc, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de l'intervalle $[-1,0]$ sur l'intervalle $f([-1,0]) = [f(-1), f(0)] = \left[-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Comme $0 \in \left[-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que 0 admet un unique antécédent α dans $[-1,0]$. Autrement dit, $\boxed{\exists! \alpha \in [-1,0], f(\alpha) = 0}$

9°) f est strictement croissante sur $[-1,0]$ et α et $-\dfrac{1}{2}$ sont éléments de $[-1,0]$, donc :

$$\alpha > -\frac{1}{2} \iff f(\alpha) > f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Or $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2\,\text{Arcsin}\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right) = -2\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{6}$.
De plus, $f(\alpha) = 0$ donc $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) < f(\alpha)$. Ainsi, $\boxed{-\dfrac{1}{2} < \alpha}$.

10°) a) Soit $x \in [-1,1]$.
Pour tout $u \in \mathbb{R}, \cos^2 u + \sin^2 u = 1$. Donc, $\cos^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - \sin^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - x^2$.
Ainsi, $\sqrt{\cos^2(\text{Arcsin}(x))} = \sqrt{1-x^2}$ ce qui signifie $|\cos(\text{Arcsin}(x))| = \sqrt{1-x^2}$.
De plus $\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(\text{Arcsin}(x)) \geq 0$ d'où $\boxed{\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}}$.

b) α vérifie l'égalité : $f(\alpha) = 0$.
Donc, $2\,\text{Arcsin}(\alpha) = \text{Arcsin}(2\alpha^2 - 1)$ par imparité de Arcsin.
On prend alors l'image par la fonction sin : $\sin(2\,\text{Arcsin}(\alpha)) = \sin(\text{Arcsin}(2\alpha^2 - 1))$.

D'où $2\sin(\text{Arcsin}(\alpha))\cos(\text{Arcsin}(\alpha)) = 2\alpha^2 - 1$.

$\sin(\text{Arcsin}(\alpha)) = \alpha$ donc, en utilisant la question précédente, il vient : $\boxed{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2} = 2\alpha^2 - 1}$.

c) On élève au carré l'égalité précédente : $4\alpha^2(1-\alpha^2) = (2\alpha^2-1)^2$.
Ce qui s'écrit : $4\alpha^2 - 4\alpha^4 = 4\alpha^4 - 4\alpha^2 + 1$. D'où, $8\alpha^4 - 8\alpha^2 + 1 = 0$.
Ainsi α^2 est racine du trinôme $8X^2 - 8X + 1$, qui a pour discriminant :
$\Delta = 8^2 - 4 \times 8 = 8 \times 4 = 16 \times 2 = (4\sqrt{2})^2$.

Ainsi, $\alpha^2 = \dfrac{8+4\sqrt{2}}{16} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ ou $\alpha^2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$; ces deux nombres sont bien positifs.

Comme $\alpha < 0$, il vient : $\alpha = -\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}}$ ou $\alpha = -\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}}$.

Vérifions que $-\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}} \leq -\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \leq -\frac{1}{2} &\iff \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \geq \frac{1}{2} \\
&\iff \frac{2+\sqrt{2}}{4} \geq \frac{1}{4} \text{ car les deux nombres précédents sont positifs} \\
&\iff 2+\sqrt{2} \geq 1 \\
&\iff \sqrt{2} \geq -1
\end{aligned}$$

Comme $\sqrt{2} \geq -1$ il vient $-\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}} \leq -\dfrac{1}{2}$. Comme $\alpha > -\frac{1}{2}$, finalement :

$$\boxed{\alpha = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

Exercice 2

1°) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned}
(E) &\iff 1 + 2\sum_{k=0}^{n-1} z^k \; - 2z^0 + z^n = 0 \\
&\iff -1 + 2\frac{1-z^n}{1-z} + z^n = 0 \qquad \text{car } z \neq 1 \\
&\iff -1 + z + 2 - 2z^n + z^n(1-z) = 0 \\
&\iff 1 + z - z^n - z^{n+1} = 0 \\
&\iff 1 + z - z^n(1+z) = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{(E) \iff (1-z^n)(1+z) = 0}$$

2°) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 1^k + 1^n = 1 + 2(n-1) + 1 = 2n \neq 0$ donc 1 n'est pas solution de (E).
On peut donc supposer dans la suite $z \neq 1$.

$$\begin{aligned}
(E) &\iff (1-z^n)(1+z) = 0 \qquad \text{par 1} \\
&\iff z^n = 1 \text{ ou } z = -1 \\
&\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\},\; z = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{ou } z = -1
\end{aligned}$$

Si $0 \leq k \leq n-1$, $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1 \iff k = 0$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \{-1\} \cup \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} \,/\, k \in \{1, \ldots, n-1\}\}.}$

$(-1)^n = -1$ car n est impair donc -1 n'est pas solution de l'équation $z^n = 1$, donc -1 n'est pas de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $1 \leq k \leq n-1$.
De plus, les $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $1 \leq k \leq n-1$ sont distincts 2 à 2.
Ainsi, $\boxed{(E) \text{ possède } n \text{ solutions}}$.

3°) Soit $u \in \mathbb{C}$. $1 - iu = 0 \iff u = \dfrac{1}{i} \iff u = -i$.
On suppose $u \neq -i$.

$$\begin{aligned}
\frac{1+iu}{1-iu} = e^{i\varphi} &\iff 1 + iu = e^{i\varphi}(1 - iu) \\
&\iff iu(1 + e^{i\varphi}) = e^{i\varphi} - 1 \\
&\iff u = \frac{e^{i\varphi} - 1}{i(1 + e^{i\varphi})} \qquad \text{car } e^{i\varphi} \neq -1 \text{ puisque } \varphi \text{ ne s'écrit pas } \pi + 2p\pi \text{ où } p \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$\dfrac{e^{i\varphi} - 1}{i(1 + e^{i\varphi})} = \dfrac{e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{\frac{i\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right)}{ie^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{\frac{i\varphi}{2}} + e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right)} = \dfrac{2i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{i2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \tan\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$. De plus, $\tan\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) \neq -i$.

Ainsi, $\boxed{(*) \text{ admet une seule solution : le réel } \tan\left(\dfrac{\varphi}{2}\right).}$

4°) Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

$$\begin{aligned}
(E') &\iff \frac{1+iu}{1-iu} \text{ est solution de } (E) \\
&\iff \frac{1+iu}{1-iu} = -1 \text{ ou } \exists k \in \{1, \ldots, n-1\}, \frac{1+iu}{1-iu} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}
\end{aligned}$$

$\dfrac{1+iu}{1-iu} = -1 \iff 1 + iu = -1 + iu \iff \underbrace{-1 = 1}_{\text{exclu}}$.

Pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\frac{2k\pi}{n} \in]0, 2\pi[$. De plus, $\frac{2k\pi}{n} = \pi \iff k = \frac{n}{2}$. Or $k \neq \frac{n}{2}$ car n est impair.
Ainsi $\frac{2k\pi}{n}$ ne s'écrit pas $\pi + 2p\pi$ où $p \in \mathbb{Z}$.
Donc, par 3, $\dfrac{1+iu}{1-iu} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \iff u = \tan\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.
Les nombres trouvés sont bien distincts de $-i$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation est } \left\{\tan\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) \,/\, k \in \{1, \ldots, n-1\}\right\}}$.

Exercice 3

1°) Comme dans la somme interne, $\dfrac{1}{i}$ est une constante vis-à-vis de k :

$$\begin{aligned}
D_n &= \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1)\frac{1}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n+1}{i} - 1\right) = (n+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{D_n = (n+1)H_n - n.}$$

2°) En échangeant les deux symboles $\sum$, $D_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}$ donc $\boxed{D_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k}$.

3°) On a donc

$$
\begin{aligned}
(n+1)H_n - n &= \sum_{k=1}^{n} H_k\\
H_n &= \frac{n}{n+1} + \frac{H_1 + H_2 + \cdots + H_n}{n+1}\\
\text{d'où}\quad H_n + \frac{1}{n+1} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{H_1 + H_2 + \cdots + H_n}{n+1}\\
&\boxed{H_{n+1} = 1 + \frac{H_1 + H_2 + \cdots + H_n}{n+1}}
\end{aligned}
$$

4°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$(u_{k+1} - u_k)H_k + (H_{k+1} - H_k)u_{k+1} = u_{k+1}H_k - u_kH_k + H_{k+1}u_{k+1} - H_ku_{k+1} = H_{k+1}u_{k+1} - H_ku_k$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$(u_{k+1} - u_k)H_k = H_{k+1}u_{k+1} - H_ku_k - (H_{k+1} - H_k)u_{k+1}$. D'où, en sommant :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k)H_k &= \sum_{k=1}^{n}(-H_ku_k + H_{k+1}u_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n}(H_{k+1} - H_k)u_{k+1}\\
&= -H_1u_1 + H_2u_2 - H_2u_2 + H_3u_3 - \cdots - H_nu_n + H_{n+1}u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(H_{k+1} - H_k)u_{k+1}\\
&= -H_1u_1 + H_{n+1}u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(H_{k+1} - H_k)u_{k+1} \quad \text{(somme télescopique)}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k)H_k = H_{n+1}u_{n+1} - u_1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}u_{k+1}} \quad \text{car } H_1 = 1 \text{ et } H_{k+1} = H_k + \frac{1}{k+1}$$

5°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $u_{k+1} - u_k = k$, donc, en sommant ces égalités :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=1}^{n} k\\
u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + u_4 - u_3 + \cdots + u_{n+1} - u_n &= \frac{n(n+1)}{2}\\
u_{n+1} - u_1 &= \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{par téléscopage}\\
&\boxed{u_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}}
\end{aligned}
$$

6°) Avec la formule obtenue en question 4, et comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_{k+1} - u_k = k$, et $u_{k+1} = \dfrac{k(k+1)}{2}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kH_k &= H_{n+1}\frac{n(n+1)}{2} - u_1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\frac{k(k+1)}{2}\\
&= H_{n+1}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} kH_k = H_{n+1}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{4}.}$$

7°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $k = i + n$ dans S_n :

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ donc } \boxed{S_n = H_{2n} - H_n}$$

8°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= H_{2(n+1)} - H_{n+1} - (H_{2n} - H_n) \\ &= H_{2n+2} - H_{2n} + H_n - H_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{2n+2} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}}$$

9°) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n : S_n = T_n$.

- $S_1 = H_2 - H_1 = 1 + \dfrac{1}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$, et $T_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, donc P_1 est vraie.
- Supposons P_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} + T_n \\ &= -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} + S_n \qquad \text{par } P_n \\ &= S_{n+1} \qquad \text{par 8} \end{aligned}$$

  Donc P_{n+1} est vraie.
- Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = T_n}$.

10°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \mathbb{N}^*$.

$\ln(n+i+1) - \ln(n+i) = \ln\left(\dfrac{n+i+1}{n+i}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+i}\right)$, donc, comme $\dfrac{1}{n+i} \in]-1, +\infty[$, on peut affirmer que $\ln(n+i+1) - \ln(n+i) \leq \dfrac{1}{n+i}$.

$\ln(n+i) - \ln(n+i-1) = \ln\left(\dfrac{n+i}{n+i-1}\right) = -\ln\left(\dfrac{n+i-1}{n+i}\right) = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+i}\right)$.

Comme $n+i \geq 2$, $-\dfrac{1}{n+i} > -1$, et donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+i}\right) \leq \dfrac{-1}{n+i}$ d'où $\dfrac{1}{n+i} \leq -\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+i}\right)$ i.e. $\dfrac{1}{n+i} \leq \ln(n+i) - \ln(n+i-1)$.

Ainsi, on a bien $\boxed{\ln(n+i+1) - \ln(n+i) \leq \dfrac{1}{n+i} \leq \ln(n+i) - \ln(n+i-1)}$.

11°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, sommons l'encadrement obtenu à la question précédente pour i allant de 1 à n :

$$\sum_{i=1}^{n} (\ln(n+i+1) - \ln(n+i)) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} \leq \sum_{i=1}^{n} (\ln(n+i) - \ln(n+i-1))$$

Or le terme central est $S_n = T_n$, à gauche on a une somme télescopique :

$$\ln(n+2)-\ln(n+1)+\ln(n+3)-\ln(n+2)+\cdots+\ln(2n+1)-\ln(2n) = \ln(2n+1)-\ln(n+1) = \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$$

et à droite aussi :

$$\ln(n+1)-\ln(n)+\ln(n+2)-\ln(n+1)+\cdots+\ln(2n)-\ln(2n-1) = \ln(2n)-\ln(n) = \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = \ln(2).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq T_n \leq \ln(2)$. Or $\frac{2n+1}{n+1} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, donc $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)}$.

Exercice 4

1°) a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. $f(z) = 1 + \frac{1}{z-1}$. $\frac{1}{z-1} \neq 0$ donc $f(z) \neq 1$. Ainsi, $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Donc $\boxed{f \text{ est bien à valeurs dans } \mathbb{C} \setminus \{1\}}$.

b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$f \circ f(z) = f(f(z)) = 1 + \frac{1}{f(z)-1} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}-1} = 1 + z - 1 = z.$

Ainsi, $\boxed{f \circ f(z) = z}$.

c) Soit $(z, z') \in (\mathbb{C} \setminus \{1\})^2$.

Nous allons montrer la contraposée i.e. : $f(z) = f(z') \implies z = z'$.

On suppose que $f(z) = f(z')$.

Alors, $1 + \frac{1}{z-1} = 1 + \frac{1}{z'-1}$. Donc, $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z'-1}$ puis $z - 1 = z' - 1$. Donc $z = z'$.

On a montré que $\boxed{z \neq z' \implies f(z) \neq f(z')}$.

2°) Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$.

$$\begin{aligned} f(z) + \overline{f(z)} = 1 &\iff 1 + \frac{1}{z-1} + 1 + \frac{1}{\overline{z}-1} = 1 \\ &\iff \frac{\overline{z}-1+z-1}{(z-1)(\overline{z}-1)} = -1 \\ &\iff z + \overline{z} - 2 = -\left(z\overline{z} - z - \overline{z} + 1\right) \\ &\iff z + \overline{z} - 2 = -z\overline{z} + z + \overline{z} - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(z) + \overline{f(z)} = 1 \iff z\overline{z} = 1}$$

3°) On a montré, dans la question précédente, que : $\forall t \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, f(t) + \overline{f(t)} = 1 \iff t\overline{t} = 1$.
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On pose $t = f(z)$. Alors $t \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
Donc $f(t) + \overline{f(t)} = 1 \iff t\overline{t} = 1$. i.e. $f(f(z)) + \overline{f(f(z))} = 1 \iff f(z)\overline{f(z)} = 1$.
Or $f \circ f(z) = z$ par 1b. Ainsi, $\boxed{z + \overline{z} = 1 \iff f(z)\overline{f(z)} = 1}$.

4°) **a)** Soit $z' \in f(\mathcal{D})$. Montrons que $z' \in \Gamma \setminus \{1\}$.
z' s'écrit $f(z)$ où $z \in \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ a pour équation $x = \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{1}{2}$ i.e. $z + \overline{z} = 1$.
Donc, par 3, $f(z)\overline{f(z)} = 1$ i.e. $z'\overline{z'} = 1$, ce qui s'écrit $|z'|^2 = 1$. Donc $z' \in \Gamma$. De plus, $z' = f(z) \neq 1$. Donc $\boxed{z' \in \Gamma \setminus \{1\}}$.

b) Par la question précédente, on a montré que : $f(\mathcal{D}) \subset \Gamma \setminus \{1\}$.
Montrons l'inclusion réciproque.
Soit $z' \in \Gamma \setminus \{1\}$.
On pose $z = f(z')$. Alors $f(z) = f(f(z'))$ i.e. $f(z) = z'$.
On sait que $|z'|^2 = 1$ donc $z'\overline{z'} = 1$. Donc, par 2, $f(z') + \overline{f(z')} = 1$ i.e. $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{1}{2}$.
Donc $z \in \mathcal{D}$ et on a $z' = f(z)$. Donc $z' \in f(\mathcal{D})$.
On a montré que : $\Gamma \setminus \{1\} \subset f(\mathcal{D})$.
Finalement, on a bien : $\boxed{f(\mathcal{D}) = \Gamma \setminus \{1\}}$.

5°) **a)** $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 1$ donc $M\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right) \in \Gamma$. De plus, $\dfrac{3}{5} \in \mathbb{Q}$ et $\dfrac{4}{5} \in \mathbb{Q}$.
Donc $\boxed{M \text{ est un point rationnel de } \Gamma}$.

b)

$$\begin{aligned} f(u) &= 1 + \frac{1}{-\frac{1}{2} + ip} \\ &= 1 + \frac{2}{-1 + 2ip} \\ &= 1 + \frac{2(-1 - 2ip)}{1 + 4p^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(u) = \frac{-1 + 4p^2}{1 + 4p^2} + i\frac{-4p}{1 + 4p^2}}$$

c) Soit $p \in \mathbb{Z}$. Alors $u = \dfrac{1}{2} + ip \in \mathcal{D}$ donc, par 4a, $f(u) \in \Gamma \setminus \{1\}$. De plus, la partie réelle et la partie imaginaire de $f(u)$ sont des nombres rationnels (comme quotients d'entiers). Ainsi, $f(u)$ est un point rationnel de Γ.
D'autre part, si p et p' sont des entiers tels que $p \neq p'$ alors $\dfrac{1}{2} + ip \neq \dfrac{1}{2} + ip'$.
Donc, par 1c, $f\left(\dfrac{1}{2} + ip\right) \neq f\left(\dfrac{1}{2} + ip'\right)$.
Comme l'ensemble $\mathbb{Z}$ est infini, on en déduit que $\boxed{\Gamma \text{ possède une infinité de points rationnels}}$.