Devoir surveillé 2.

Samedi 9 novembre 2024, de 7h45 à 11h45.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de souligner les résultats, et de laisser une* ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

On définit la fonction f par : $f(x) = 2\,\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arcsin}(1-2x^2)$.

1°) Donner l'allure de la courbe représentative de Arcsin dans un repère orthonormé (*on ne demande aucune justification dans cette question*).

2°) Justifier que le domaine de définition de f est $D = [-1,1]$.

3°) Justifier que f est continue sur D.

4°) Justifier rigoureusement que f est dérivable au moins sur l'ensemble $D' =]-1,1[\setminus\{0\}$.
Calculer et simplifier $f'(x)$ pour $x \in D'$.

5°) Montrer que f est constante sur $]0,1[$.
En déduire que f est constante sur $[0,1]$ et déterminer cette constante.

6°) Exprimer $f(x)$ en fonction de $\mathrm{Arcsin}(x)$ pour $x \in [-1,0]$.

7°) Tracer l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.

8°) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-1,0]$.

9°) Montrer que $-\dfrac{1}{2} < \alpha$.

10°) *Détermination de* α

a) Montrer que : $\forall x \in [-1,1],\ \cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

b) Montrer que : $2\alpha\sqrt{1-\alpha^2} = 2\alpha^2 - 1$.

c) En déduire α.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel impair.
On considère l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E)\ :\ 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} z^k + z^n = 0$$

1°) Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. Montrer que : z solution de $(E) \iff (1-z^n)(1+z) = 0$.

2°) En déduire les solutions de (E). Combien y en a-t-il ?

3°) Soit $\varphi \in \mathbb{R}\setminus\{\pi + 2p\pi \,/\, p \in \mathbb{Z}\}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(*)$: $\dfrac{1+iu}{1-iu} = e^{i\varphi}$ d'inconnue u.
On exprimera la réponse en fonction de φ *et* tan.

4°) Déduire de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E') d'inconnue u :

$$(E')\ :\ 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1+iu}{1-iu}\right)^k + \left(\frac{1+iu}{1-iu}\right)^n = 0$$

Exercice 3

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Les parties sont indépendantes les unes des autres.

Partie 1 : Une somme double

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{i}.$$

1°) Exprimer D_n en fonction de H_n et de n (uniquement).

2°) Montrer que l'on a également : $D_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$.

3°) En déduire l'égalité :

$$H_{n+1} = 1 + \frac{H_1 + H_2 + \cdots + H_n}{n+1}.$$

Partie 2 : Une transformation d'Abel

4°) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite.
Développer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(u_{k+1} - u_k)H_k + (H_{k+1} - H_k)u_{k+1}$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k)H_k = H_{n+1}u_{n+1} - u_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} u_{k+1}.$$

5°) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 = 0$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_{k+1} = u_k + k$.
En considérant l'égalité $u_{k+1} - u_k = k$, déterminer l'expression de u_{n+1} en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6°) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kH_k$ en fonction de H_{n+1} et de n.

Partie 3 : Deux autres sommes

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$, et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

7°) À l'aide d'un changement d'indice, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = H_{2n} - H_n$.

8°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}$.

9°) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = T_n$.

10°) On rappelle que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in \mathbb{N}^*$

$$\ln(n+i+1) - \ln(n+i) \leq \frac{1}{n+i} \leq \ln(n+i) - \ln(n+i-1).$$

11°) En déduire un encadrement de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis montrer que $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

Exercice 4

Dans ce problème on munit le plan euclidien d'un repère orthonormé direct.
On désignera par Γ le cercle de centre l'origine O du repère et de rayon 1.
Dans tout l'exercice, on confondra le point M d'affixe z et le complexe z.

On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.
On considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 1 + \dfrac{1}{z-1}. \end{array}$$

1°) a) Justifier que f est à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

b) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, f \circ f(z) = z$.

c) Montrer que : $\forall (z, z') \in (\mathbb{C} \setminus \{1\})^2,\ z \neq z' \implies f(z) \neq f(z')$.

2°) Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. Montrer que $f(z) + \overline{f(z)} = 1 \iff z\overline{z} = 1$.

3°) En déduire, à l'aide de la question 1b, que : $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{1\},\ z + \overline{z} = 1 \iff f(z)\overline{f(z)} = 1$.

4°) On note $f(\mathcal{D})$ l'ensemble $\{f(z)\ /\ z \in \mathcal{D}\}$.

a) Soit $z' \in f(\mathcal{D})$. Montrer, en utilisant une question précédente, que $z' \in \Gamma \setminus \{1\}$.

b) *Question facultative* : Montrer que $f(\mathcal{D}) = \Gamma \setminus \{1\}$.
Cette question facultative ne sert pas dans la suite de l'exercice.

5°) *Une application* :
On dit qu'un point M de coordonnées (x, y) est un point rationnel du cercle Γ si :

$$\begin{cases} M \in \Gamma \\ x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

On rappelle qu'on pourra confondre un point M et son affixe z.

L'objectif de cette question est de prouver que le cercle Γ possède une infinité de points rationnels.

a) Justifier que $M\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ est un point rationnel du cercle Γ.

b) Soit $u = \dfrac{1}{2} + ip$ où $p \in \mathbb{Z}$. Donner l'écriture algébrique de $f(u)$.

c) Conclure.

$* * * * *$ FIN $* * * * *$