Correction du devoir surveillé 1.

Exercice 1

1°) a) Par somme, u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$u'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x} > 0 \text{ car } x > 0 \text{ et } 2x^2+1 > 0.$$

Donc u est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Les limites en 0 et en $+\infty$ se trouvent par somme de limites :

x	0		$+\infty$
u	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) u est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est bien un intervalle, et elle y est strictement croissante.
D'après le théorème de la bijection, u réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]\lim\limits_{x\to 0} u(x), \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)[$, ie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]-\infty,+\infty[$.
Comme $0 \in]-\infty,+\infty[$, 0 a un unique antécédent dans $\mathbb{R}_+^*$ par u, i.e. :
$\boxed{\text{il existe un unique réel strictement positif } \alpha \text{ tel que } u(\alpha) = 0.}$

2°) Par somme et composition de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(x) = 2x + 2\frac{1}{x}\ln(x) = \frac{2x^2 + 2\ln(x)}{x} = \frac{2}{x}u(x),$$

et comme ici $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $u(x)$.
Comme u est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $u(\alpha) = 0$:

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3°) a) M a pour coordonnées $(x, \ln(x))$, donc $\boxed{OM = \sqrt{x^2 + (\ln(x))^2}}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x.
On a $OM = \sqrt{g(x)}$, et comme la fonction racine est strictement croissante, $x \mapsto \sqrt{g(x)}$ et g atteignent leur minimum au même point, c'est-à-dire en α d'après la question précédente.
Ainsi, la valeur minimale de OM est $\sqrt{g(\alpha)} = \boxed{\sqrt{\alpha^2 + (\ln(\alpha))^2}}$.

4°) Comme $\ln'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$ est la pente de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A, un vecteur directeur de T est $\boxed{\vec{v} = \left(1, \dfrac{1}{\alpha}\right)}$.

Un vecteur directeur de la droite (OA) est $\overrightarrow{OA} = (\alpha, \ln(\alpha))$. Calculons le produit scalaire de ces deux vecteurs :

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{OA} = 1 \times \alpha + \frac{1}{\alpha} \times \ln(\alpha) = \frac{\alpha^2 + \ln(\alpha)}{\alpha} = \frac{u(\alpha)}{\alpha} = 0.$$

Ainsi ces vecteurs sont orthogonaux, ce qui signifie que $\boxed{T \text{ et } (OA) \text{ sont perpendiculaires}}$.

Exercice 2

1°) Soit $x \in I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Alors $\cos x > 0$ donc $\ln(\cos x)$ existe.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est bien définie}}$.

2°) Soit $x \in I$. On a $-x \in I$ et

$f(-x) = \ln(\cos(-x)) = \ln(\cos x)$ car cos est paire. Ce qui s'écrit : $f(-x) = f(x)$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est paire}}$.

3°) f est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables et pour tout $x \in I$, $f'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
f	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Explication des limites :

$$\begin{cases} \cos x \xrightarrow[\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}]{} 0 \\ \ln X \xrightarrow[X \to 0]{} -\infty \end{cases} \quad \text{donc } f(x) \xrightarrow[\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}]{} -\infty. \text{ Par parité de } f \text{ on a la même limite à droite en } -\frac{\pi}{2}.$$

4°) Pour le tracé de la courbe, on précise les asymptotes verticales, ainsi que la tangente au point d'abscisse 0 ($f'(0) = -\tan(0) = 0$ d'où une tangente horizontale).

c.f. dernière question

5°) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \cos x + \sqrt{3} \sin x &= 2\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) \\ &= 2\left(\cos x \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= \boxed{2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{a = 2 \text{ et } \varphi = \dfrac{\pi}{3} \text{ conviennent}}$

b) Soit $x \in I' = \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$ ie $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.

Alors $-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}$ ie $-\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > 0$. Donc, $g(x)$ existe.

$\boxed{g \text{ est bien définie.}}$

c) Soit $x \in I'$.

Alors $g(x) = \ln 2 + \ln\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \boxed{\ln 2 + f\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$.

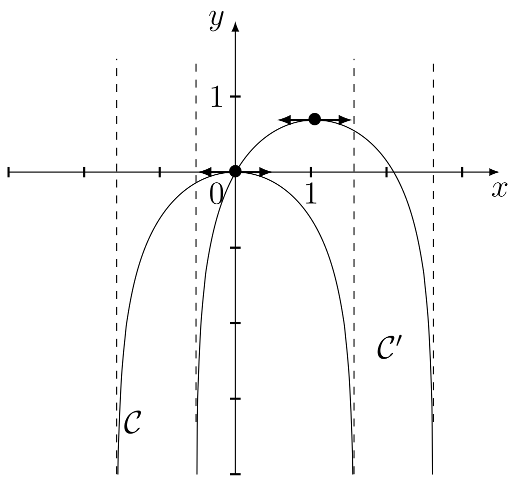
d) Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Soit y un réel.

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in \mathcal{C} &\iff y = f(x) \\
&\iff y = f\left(x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) \\
&\iff y = g\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \ln 2 \qquad \text{par la question précédente} \\
&\iff y + \ln 2 = g\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\
&\iff M'\left(x + \frac{\pi}{3}, y + \ln 2\right) \in \mathcal{C}'
\end{aligned}$$

M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\left(\frac{\pi}{3}, \ln 2\right)$ et ceci pour tout $x \in I$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{C}' \text{ est l'image de } \mathcal{C} \text{ par la translation de vecteur } \overrightarrow{u}}$.

e) Tracés simultanés des deux courbes :



Exercice 3

1°) Notons (I_1) : $\sqrt{x} - \sqrt{2-x} \geq 2$, pour $x \in \mathbb{R}$, (I_1) est bien définie si et seulement si $x \geq 0$ et $2 - x \geq 0$ i.e. (I_1) est définie sur $[0,2]$.

Soit $x \in [0,2]$.

$$\begin{aligned}
(I_1) &\iff \sqrt{x} \geq \sqrt{2-x} + 2 \\
&\iff x \geq 2 - x + 4 + 4\sqrt{2-x} \qquad \text{car } \sqrt{x} \geq 0 \text{ et } \sqrt{2-x} + 2 \geq 0 \\
&\iff 2x - 6 \geq 4\sqrt{2-x}
\end{aligned}$$

Or $x \leq 2$ donc $2x - 6 \leq -2 < 0$, tandis que $4\sqrt{2-x} \geq 0$.

Ainsi, (I_1) n'est jamais vérifiée, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_1) \text{ est vide}}$.

2°) L'inéquation (I_2) : $\ln x - \dfrac{1}{\ln x} < \dfrac{3}{2}$est définie pour les réels x vérifiant : $\left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{array}\right.$, donc elle est définie sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$.

$$\begin{aligned}\ln x - \frac{1}{\ln x} < \frac{3}{2} &\Longleftrightarrow \ln x - \frac{1}{\ln x} - \frac{3}{2} < 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{(\ln x)^2 - \frac{3}{2}\ln x - 1}{\ln x} < 0\end{aligned}$$

On cherche le signe de $(\ln x)^2 - \dfrac{3}{2}\ln x - 1$.

$$(\ln x)^2 - \frac{3}{2}\ln x - 1 > 0 \Longleftrightarrow X^2 - \frac{3}{2}X - 1 > 0 \text{ avec } X = \ln x$$

Le discriminant de $X^2 - \dfrac{3}{2}X - 1$ est $\Delta = \frac{9}{4} + 4 = \dfrac{25}{4}$. Ses racines sont donc $\dfrac{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}{2} = 2$ et $\dfrac{\frac{3}{2} - \frac{5}{2}}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Comme le coefficient de X^2 est positif :

$$\begin{aligned}(\ln x)^2 - \frac{3}{2}\ln x - 1 > 0 &\Longleftrightarrow X < -\frac{1}{2} \text{ ou } X > 2 \\ &\Longleftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \text{ ou } \ln x > 2 \\ &\Longleftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } x > e^2 \text{ car exp est strictement croissante}\end{aligned}$$

On a aussi :

$$(\ln x)^2 - \frac{3}{2}\ln x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } x = e^2$$

Nous connaissons aussi le signe de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où le tableau de signe :

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		1		e^2		$+\infty$
$(\ln x)^2 - \frac{3}{2}\ln x - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

où $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2 - \frac{3}{2}\ln x - 1}{\ln x}$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est }]0, e^{-\frac{1}{2}}[\ \cup]1, e^2[.}$

Exercice 4

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(E_1)\ :\ & \sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)\\
\iff & \sin(2x-x)+\sin(2x)+\sin(2x+x)=\cos(2x-x)+\cos(2x)+\cos(2x+x)\\
\iff & \sin(2x)\cos(x)-\cos(2x)\sin(x)+\sin(2x)+\sin(2x)\cos(x)+\cos(2x)\sin(x)\\
& \qquad =\cos(2x)\cos(x)+\sin(2x)\sin(x)+\cos(2x)+\cos(2x)\cos(x)-\sin(2x)\sin(x)\\
\iff & \sin(2x)+2\sin(2x)\cos(x)=\cos(2x)+2\cos(2x)\cos(x)\\
\iff & \sin(2x)(1+2\cos(x))=\cos(2x)(1+2\cos(x))\\
\iff & (\sin(2x)-\cos(2x))\,(1+2\cos(x))=0\\
\iff & \sin(2x)-\cos(2x)=0 \text{ ou } 1+2\cos(x)=0\\
\iff & \sin(2x)\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos(2x)\frac{1}{\sqrt{2}}=0 \text{ ou } \cos(x)=-\frac{1}{2}\\
\iff & \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \text{ ou } \exists\, k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\
\iff & \exists\, k\in\mathbb{Z},\ 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi \text{ ou } x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\
\iff & \exists\, k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2} \text{ ou } x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est donc $\boxed{\left\{\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ -\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

2°) L'équation (E_2) : $\sin x+\cos x=1+\tan x$ est définie sur $D=\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$.
Soit $x\in D$.

$$\begin{aligned}
(E_2) \iff & \sin x+\cos x=1+\frac{\sin x}{\cos x}\\
\iff & \cos x\,(\sin x+\cos x)=\cos x+\sin x\\
\iff & \cos x\,(\sin x+\cos x)-(\cos x+\sin x)=0\\
\iff & (\sin x+\cos x)\,(\cos x-1)=0\\
\iff & \sin x+\cos x=0 \text{ ou } \cos x=1\\
\iff & \frac{\sin x}{\cos x}+1=0 \text{ ou } \exists\, k\in\mathbb{Z},\ x=2k\pi \text{ car } \cos x\neq 0\\
\iff & \tan x=-1 \text{ ou } \exists\, k\in\mathbb{Z},\ x=2k\pi\\
\iff & \exists\, k\in\mathbb{Z},\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ ou } \exists\, k\in\mathbb{Z},\ x=2k\pi
\end{aligned}$$

Toutes les valeurs obtenues sont bien dans D, donc l'ensemble des solutions est
$\boxed{\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi, 2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

Exercice 5

1°) $-\frac{1}{x}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}-\infty$ et $e^X\underset{X\to-\infty}{\longrightarrow}0$.
Par composition de limites, $e^{-\frac{1}{x}}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}0$, et par produit, $\boxed{f(x)\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}0.}$
Comme $0=f(0)$, cela signifie que $\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$

2°) Par composition et produit de fonctions dérivables là où elles sont définies, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$.
Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + (x+1)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \boxed{e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}.$$

3°) Déterminons le taux d'accroissement de f en 0 : pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(x+1)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$$

Comme $Xe^{-X} = \dfrac{X}{e^X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{1}{x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$, on a $\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$.
Par ailleurs, $e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$, ce qui signifie que $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et que } f'(0) = 0}$.

4°) $\forall x > 0, f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) > 0$ car $\exp > 0$ et $x > 0$.
Limite en $+\infty$: $-\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et exp est continue en 0 donc $e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(0) = 1$.
Par produit, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

5°) a) Pour tout $x > 0$,

$$x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) = \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = -\frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{-\frac{1}{x}}$$

Or on sait que $-\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $\dfrac{e^X - 1}{X} \underset{X\to0}{\longrightarrow} 1$. D'où :

$$\boxed{x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1}$$

b) Pour tout $x > 0$, $f(x) - x = (x+1)e^{-\frac{1}{x}} - x = x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) + e^{-\frac{1}{x}}$.
On sait que $e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Grâce à la question précédente, on peut donc affirmer que $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Cela signifie que $\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } y = x \text{ est asymptote à } \mathcal{C} \text{ en } +\infty.}$

c) *Méthode 1* : D'après le cours, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $1 + u \leq e^u$.
En multipliant cette inégalité par e^{-u} qui est bien positif, on obtient, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $e^{-u}(1+u) \leq 1$.
Méthode 2 : Posons, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $g(u) = e^{-u}(1+u)$.
Par composition et produit, g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $u \in \mathbb{R}^+$:
$g'(u) = -e^{-u}(1+u) + e^{-u} = e^{-u}(-(1+u) + 1) = -ue^{-u}$.
Comme exp est positive, pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, $g'(u) \leq 0$, donc g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
Comme $g(0) = 1$, on a $\boxed{\text{pour tout } u \in \mathbb{R}^+,\ e^{-u}(1+u) = g(u) \leq 1.}$

d) Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) - x &= (1+x)e^{-\frac{1}{x}} - x \\ &= x\left(\frac{1}{x}+1\right)e^{-\frac{1}{x}} - x \\ &= x\left[\left(\frac{1}{x}+1\right)e^{-\frac{1}{x}} - 1\right] \\ &= x\left[g\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right] \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, comme $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$, $g\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1 \leq 0$, et finalement $f(x) - x \leq 0$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{C} \text{ est en dessous de } \Delta \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ entier.}}$

6°) Une équation de T_α est $y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$.
$\alpha > 0$ donc $f'(\alpha) \neq 0$. Ainsi, T_α coupe bien l'axe des abscisses.
L'abscisse x du point d'intersection vérifie : $0 = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} x - \alpha &= -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \\ x &= \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \\ &= \alpha - \frac{\alpha}{\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^2}} \\ &= \alpha - \frac{\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha^2+\alpha+1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha^2+\alpha+1) - \alpha^2(\alpha+1)}{\alpha^2+\alpha+1} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2+\alpha+1} \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{T_\alpha \text{ coupe l'axe des abscisses au point } \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\alpha+1}.}$

7°) **a)** Par produit et composition, f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui signifie que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + e^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^4}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{x}}\frac{1-x}{x^4} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le signe de } f''(x) \text{ est celui de } 1-x \text{ puisque } \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} > 0.}$

b) L'équation de T_1 est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ i.e. $y = 3e^{-1}(x-1) + 2e^{-1}$ i.e. $y = 3e^{-1}x - e^{-1}$.
Ainsi on a $\boxed{a = 3e^{-1} \text{ et } b = -e^{-1}}$.

c) Posons, pour tout $x > 0$, $h(x) = f(x) - 3e^{-1}x + e^{-1}$. Comme f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, h l'est aussi et, pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = f'(x) - 3e^{-1}, \qquad h''(x) = f''(x) = e^{-\frac{1}{x}}\frac{1-x}{x^4}$$

On en déduit successivement le signe de h'', les variations de h', le signe de h', les variations de h puis finalement le signe de h.
On utilise les informations : $h'(1) = h(1) = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$h''(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
h'		$\nearrow$	0	$\searrow$	
Signe de $h'(x)$		$-$	0	$-$	
h		$\searrow$	0	$\searrow$	
Signe de $h(x)$		$+$	0	$-$	

$\forall\, x \in\,]0,1],\ h(x) \geq 0$ i.e. $f(x) \geq ax + b$ et $\forall\, x \in [1, +\infty[,\ h(x) \leq 0$ i.e. $f(x) \leq ax + b$

On en déduit que $\boxed{\text{sur }]0,1],\ \mathcal{C} \text{ est au-dessus de } T_1}$, et que $\boxed{\text{sur } [1,+\infty[,\ \mathcal{C} \text{ est en-dessous de } T_1}$.

8°) On sait $2 < e < 3$ donc $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{e} < \dfrac{1}{2}$ (on a même, $\dfrac{5}{2} < e$ donc $\dfrac{1}{e} < \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10} = 0,4$).

La tangente au point d'abscisse 1 passe par le point $(1, f(1))$ et par le point $\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$.

$f(1) = 2e^{-1} < 1$.