Devoir surveillé 1.

Samedi 28 septembre 2024, de 7h45 à 11h45.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d'encadrer ou de souligner les résultats, et de laisser une **marge**.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Le plan est supposé muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) On note u la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(x) = x^2 + \ln(x)$.

a) Établir le tableau de variation de u. On n'oubliera pas les limites aux bornes.

b) Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif α tel que $u(\alpha) = 0$.

2°) On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = x^2 + (\ln(x))^2$.
Justifier la dérivabilité de g et exprimer sa dérivée en fonction de u.
En déduire le tableau de variation de g.

3°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction ln.

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, et M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x. Exprimer la distance OM en fonction de x.

b) À l'aide des questions précédentes, déterminer la valeur minimale de la distance OM, où M désigne un point de $\mathcal{C}$.

4°) On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse α.
Déterminer un vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en A.
En déduire que cette tangente est perpendiculaire à la droite (OA).

Exercice 2

Le plan usuel est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
On pose : $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout $x \in I$, $f(x) = \ln(\cos x)$.

1°) Justifier que f est bien définie.

2°) Étudier la parité de f.

3°) Dresser le tableau de variations de f.

4°) Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ de f sur une feuille à part.

5°) **a)** Déterminer des réels a et φ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x + \sqrt{3}\sin x = a\cos(x - \varphi)$.

b) On pose, pour tout $x \in I' = \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$, $g(x) = \ln(\cos x + \sqrt{3}\sin x)$.
Justifier que g est bien définie.

c) Soit $x \in I'$. Exprimer $g(x)$ à l'aide de la fonction f.

d) En déduire que la courbe $\mathcal{C}'$ de g s'obtient à partir de la courbe $\mathcal{C}$ de f à l'aide d'une transformation géométrique simple que l'on déterminera.

e) Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ sur le même graphique que $\mathcal{C}$.

Exercice 3

Résoudre les inéquations suivantes :

1°) $\sqrt{x} - \sqrt{2-x} \geq 2$

2°) $\ln x - \dfrac{1}{\ln x} < \dfrac{3}{2}$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

1°) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$

2°) $\sin x + \cos x = 1 + \tan x$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1°) Montrer que $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$. Qu'en déduire sur la fonction f ?

2°) Justifier la dérivabilité de f sur $]0, +\infty[$ et calculer la dérivée de f sur cet intervalle.

3°) Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

4°) Dresser le tableau de variation de f.

5°) **a)** Justifier que $x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -1$.

b) En déduire que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

c) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, $e^{-u}(1+u) \leq 1$.

d) En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

6°) Soit $\alpha > 0$ et T_α la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α.
Montrer que T_α coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \alpha + 1}$.

7°) **a)** Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x)$ est du signe de $1 - x$.

b) Déterminer les réels a et b tels que la tangente T_1 à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 ait pour équation : $y = ax + b$.

c) Déterminer les positions relatives de $\mathcal{C}$ et T_1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
Indication : on se servira de la question 7a.

8°) Donner l'allure de $\mathcal{C}$, de Δ et de T_1 sur une même figure.

$* * * * *$ FIN $* * * * *$