Corrigé du devoir maison 13.

Exercice 1

1°) a) X est le nombre de succès (tirer pile) dans la répétition de n épreuves de Bernoulli (jouer à pile ou face) indépendantes, de même probabilité de succès p.

Ainsi, $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p}$.

D'après le cours, $\boxed{E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p)}$.

b) $n - X$ est le nombre de défaites, autrement dit le nombre total de faces obtenu.

Par ailleurs, $X < \frac{n}{2}$ si et seulement si $n - X > \frac{n}{2}$, autrement dit les événements $\left(X < \frac{n}{2}\right)$ et $\left(n - X > \frac{n}{2}\right)$ sont égaux.

Or comme $p = \frac{1}{2}$ dans cette question, on a une symétrie des rôles du pile et du face, donc $n - X$ suit la même loi que X.

Donc, $P\left(n - X > \frac{n}{2}\right) = P\left(X > \frac{n}{2}\right)$, i.e. $\boxed{P\left(X < \frac{n}{2}\right) = P\left(X > \frac{n}{2}\right)}$.

c) Le nombre de victoires est X et le nombre de défaites est $n - X$.

On cherche donc la probabilité de l'événement $(X > n - X)$, c'est-à-dire de $\left(X > \frac{n}{2}\right)$.

★ On suppose que <u>n est impair</u>.
Alors, les événements $\left(X > \frac{n}{2}\right)$ et $\left(X < \frac{n}{2}\right)$ forment un système complet d'événements donc $P\left(X > \frac{n}{2}\right) + P\left(X < \frac{n}{2}\right) = 1$.
D'où $\boxed{P\left(X > \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}}$.

★ On suppose que <u>n est pair</u>.
Alors, les événements $\left(X > \frac{n}{2}\right)$, $\left(X = \frac{n}{2}\right)$, $\left(X < \frac{n}{2}\right)$ forment un système complet d'événements donc $P\left(X > \frac{n}{2}\right) + P\left(X = \frac{n}{2}\right) + P\left(X < \frac{n}{2}\right) = 1$.
Or $P\left(X = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{2^{n-\frac{n}{2}}} = \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n}$.
Ainsi, $\boxed{P\left(X > \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n}\right)}$.

2°) a) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. $\boxed{Y_i \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } p}$.

b) On note :
$A_0 = (Y_1 = 1) \cap (Y_2 = 1) \dots (Y_n = 1)$ (aucun échec),
$A_1 = (Y_1 = 0) \cap (Y_2 = 1) \dots (Y_n = 1)$(échec puis succès à partir de la deuxième partie)
$A_2 = (Y_1 = 0) \cap (Y_2 = 0) \cap (Y_3 = 1) \dots (Y_n = 1)$ (échecs puis succès à partir de la 3ème partie)
$\dots$

$A_{n-1} = (Y_1 = 0) \cap (Y_2 = 0) \cdots \cap (Y_{n-1} = 0) \cap (Y_n = 1)$ (échecs puis succès à la $n^{\text{ème}}$ partie)
$A_n = (Y_1 = 0) \cap (Y_2 = 0) \cdots \cap (Y_n = 0)$ (aucun succès)

Alors $\boxed{A = \bigcup_{i=0}^{n} A_i}$.

c) Les événements A_i sont incompatibles 2 à 2. Donc, $P(A) = \sum_{i=0}^{n} P(A_i)$.

Comme les variables aléatoires Y_i sont indépendantes, il vient :
$P(A_0) = P(Y_1 = 1)P(Y_2 = 1)\ldots P(Y_n = 1) = p^n$
$P(A_1) = P(Y_1 = 0)P(Y_2 = 1)\ldots P(Y_n = 1) = qp^{n-1}$.
De même, pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $P(A_i) = q^i p^{n-i}$, et $P(A_n) = q^n$.

Ainsi, $\boxed{P(A) = \sum_{i=0}^{n} q^i p^{n-i}}$.

d) ★ Supposons $\boxed{p = \frac{1}{2}}$. Alors $P(A) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^n} = \boxed{\frac{n+1}{2^n}}$.

★ On suppose $\boxed{p \neq \frac{1}{2}}$. Alors $p \neq q$, d'où $\frac{q}{p} \neq 1$ puisque $p \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{i=0}^{n} q^i p^{n-i} = p^n \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{q}{p}\right)^i \\
&= p^n \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1 - \frac{q}{p}} \qquad \text{car } \frac{q}{p} \neq 1 \\
&= p^n \frac{\dfrac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p^{n+1}}}{\dfrac{p-q}{p}}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{P(A) = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}}$$

Exercice 2

1°) Z_p est $\boxed{\text{le nombre total de boules blanches tirées lors des } p \text{ premiers tirages.}}$

2°) X_1 suit la $\boxed{\text{loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}}$, c'est-à-dire que X_1 ne prend que les valeurs 0 et 1 et $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$. Son espérance est $\boxed{E(X_1) = \frac{1}{2}.}$

3°) X_2 vaut soit 0, soit 1, de même pour X_1, donc Z_2 est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.
$(Z_2 = 0) = (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)$ donc $P(Z_2 = 0) = P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 0)$.
Or $P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$, et, sachant que $(X_1 = 0)$, le deuxième tirage se déroule dans une urne contenant exactement $c + 1$ boules noires et une boule blanche, donc la probabilité de tirer une boule noire est alors : $P_{(X_1=0)}(X_2 = 0) = \frac{c+1}{c+2}$.

Donc $\boxed{P(Z_2 = 0) = \frac{c+1}{2(c+2)}}$.

$(Z_2 = 2) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)$ donc $P(Z_2 = 2) = P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 1)$.
Or $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$, et, sachant que $(X_1 = 1)$, le deuxième tirage se déroule dans une urne contenant exactement une boule noire et $c+1$ boules blanches, donc la probabilité de tirer une boule blanche est alors : $P_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \dfrac{c+1}{c+2}$.

Donc $\boxed{P(Z_2 = 2) = \dfrac{c+1}{2(c+2)}}$.

Donc $P(Z_2 = 1) = 1 - P(Z_2 = 0) - P(Z_2 = 2) = 1 - 2\dfrac{c+1}{2(c+2)}$ i.e. $\boxed{P(Z_2 = 1) = \dfrac{1}{c+2}}$.

4°) a) D'après l'interprétation faite en première question, $\boxed{Z_p(\Omega) = \{0, 1, \ldots, p\}.}$

b) Soit $k \in \{0, \ldots, p\}$. Supposons l'événement $(Z_p = k)$ réalisé. Au cours des p tirages précédents, il y en a donc eu k où c'est une blanche qui a été tirée. A l'issue des p tirages, il y a donc $1 + kc$ boules blanches dans l'urne. Comme on rajoute à chaque tirage c boules (blanches ou noires), on a $2 + pc$ boules au total dans l'urne à l'issue des p tirages.
Ainsi, sachant $(Z_p = k)$, on connaît la composition de l'urne pour le $p+1$ème tirage.
L'événement $(X_{p+1} = 1)$ signifie "on tire une boule blanche au $p+1$ ème tirage", donc
$\boxed{P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1+kc}{2+pc}}$.

c) Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement associé à Z_p (c'est-à-dire $((Z_p = k))_{k\in\{0,\ldots,p\}}$) :

$$\begin{aligned}
P(X_{p+1} = 1) &= \sum_{k=0}^{p} P(Z_p = k)P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1) \\
&= \sum_{k=0}^{p} P(Z_p = k)\frac{1+kc}{2+pc} \\
&= \frac{1}{2+pc}\sum_{k=0}^{p} P(Z_p = k)(1+kc) \\
&= \frac{1}{2+pc}\left(\sum_{k=0}^{p} P(Z_p = k) + c\sum_{k=0}^{p} kP(Z_p = k)\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{2+pc}\left(1 + cE(Z_p)\right)}
\end{aligned}$$

5°) Pour tout p, X_p ne prend que les valeurs 0 et 1, donc X_p est une variable de Bernoulli.
Posons, pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$, H_p : "$P(X_p = 1) = \dfrac{1}{2}$".

- On a déjà vu que H_1 est vraie à la question 2.
- Supposons H_1, H_2, ... H_p vraie pour un p fixé entre 1 et $n-1$.
  Alors X_1, X_2, ... X_p sont des variables de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
  Donc $E(Z_p) = E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} E(X_i) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{2} = \frac{p}{2}$ en utilisant la linéarité de l'espérance.
  D'où, par la question précédente, $P(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + c\frac{p}{2}}{2+pc} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2+cp}{2+pc} = \dfrac{1}{2}$.
  Ainsi H_{p+1} est vraie.
- Par récurrence forte, on en déduit que pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$, $P(X_p = 1) = \frac{1}{2}$, ce qui signifie que $\boxed{X_p \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}}$, c'est-à-dire la loi de X_1.