Devoir maison 13.

À rendre le lundi 2 juin 2025

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Un joueur effectue une succession de n parties de « pile ou face ». Il gagne chaque fois qu'il obtient pile. La probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) On suppose, dans cette question seulement, que $p = \dfrac{1}{2}$. Soit X le nombre de parties gagnées.

a) Reconnaître la loi de X, donner son espérance et sa variance.

b) Que représente $n - X$? En déduire, sans calcul, que $P\left(X > \dfrac{n}{2}\right) = P\left(X < \dfrac{n}{2}\right)$.

c) En déduire la probabilité qu'à l'issue de ces n parties, le joueur totalise un nombre de victoires strictement supérieur au nombre de défaites.

Indication : On distinguera 2 cas selon la parité de n.

L'un des calculs utilisera $\dbinom{n}{\frac{n}{2}}$ qu'on laissera sous cette forme.

2°) Dans cette question p est un réel de l'intervalle $]0,1[$.

Pour $i \in \{1,\ldots,n\}$, on note Y_i la variable aléatoire égale à 1 si l'on obtient pile lors de la $i^{\text{ème}}$ partie et 0 sinon.

a) Quelle est la loi suivie par la variable Y_i pour $i \in \{1,\ldots,n\}$?

b) À l'aide des variables aléatoires Y_i, exprimer l'événement A : « au cours de ces n parties, un succès n'est jamais suivi d'un échec » comme une réunion.

c) En déduire que : $P(A) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i p^{n-i}$.

d) Simplifier $P(A)$.

Indication : On distinguera les cas : $p = \dfrac{1}{2}$, $p \neq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2

Soient n et c deux entiers naturels fixés, avec $c \geq 1$ et $n \geq 3$.
Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On tire une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne, avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages.
Pour tout i entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si on tire une boule blanche au i-ème tirage, et 0 sinon.

On pose alors, pour tout $p \in \{1,\ldots,n\}$, $Z_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i$.

1°) Que représente Z_p, pour tout $p \in \{1,\ldots,n\}$?

2°) Donner la loi de X_1 et son espérance.

3°) Déterminer la loi de Z_2.

4°) Soit $p \in \{1, \ldots, n-1\}$.

a) Quel est l'ensemble $Z_p(\Omega)$ des valeurs prises par Z_p ?

b) Déterminer, pour tout $k \in Z_p(\Omega)$, la valeur de $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1)$.

c) En déduire : $P(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + cE(Zp)}{2 + pc}$.

5°) Montrer par récurrence forte que pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$, X_p a même loi que X_1.