Corrigé du devoir maison 12.

Exercice 1

f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3,0,1\}$.
Commençons par effectuer la division euclidienne de $A = 2X^5+6X^4-X^3-4X^2-X-1$ par $B = X(X-1)(X+3) = X^3+2X^2-3X$.

$$\begin{array}{r|l} 2X^5+6X^4-X^3-4X^2-X-1 & X^3+2X^2-3X \\ \cline{2-2} -(2X^5+4X^4-6X^3) & 2X^2+2X+1 \\ \cline{1-1} 2X^4+5X^3-4X^2-X-1 & \\ -(2X^4+4X^3-6X^2) & \\ \cline{1-1} X^3+2X^2-X-1 & \\ -(X^3+2X^2-3X) & \\ \cline{1-1} 2X-1 & \end{array}$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-3,0,1\}$,

$$f(x) = \frac{(2x^2+2x+1)x(x-1)(x+3)+2x-1}{x(x-1)(x+3)} = (2x^2+2x+1)+\frac{2x-1}{x(x-1)(x+3)}.$$

Posons, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-3,0,1\}$, $g(x) = \dfrac{2x-1}{x(x-1)(x+3)}$.
Comme le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur, et que le dénominateur est scindé à racines simples, le théorème du cours nous permet d'affirmer qu'il existe des réels a, b et c tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-3,0,1\}$, $g(x) = \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+3}$.

$\forall\, x\in\mathbb{R}\backslash\{-3,0,1\}$, $\dfrac{2x-1}{(x-1)(x+3)} = a+\dfrac{bx}{x-1}+\dfrac{cx}{x+3}$, donc, en passant à la limite $x\to 0$, $\dfrac{1}{3} = a$.

$\forall\, x\in\mathbb{R}\backslash\{-3,0,1\}$, $\dfrac{2x-1}{x(x+3)} = \dfrac{a(x-1)}{x}+b+\dfrac{c(x-1)}{x+3}$, donc, en passant à la limite $x\to 1$, $\dfrac{1}{4} = b$.

$\forall\, x\in\mathbb{R}\backslash\{-3,0,1\}$, $\dfrac{2x-1}{x(x-1)} = \dfrac{a(x+3)}{x}+\dfrac{b(x+3)}{x-1}+c$, donc, en passant à la limite $x\to -3$, $\dfrac{-7}{12} = c$.

Finalement :

$$\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R}\backslash\{-3,0,1\},\ f(x) = 2x^2+2x+1+\frac{1}{3x}+\frac{1}{4(x-1)}-\frac{7}{12(x+3)}}.$$

Exercice 2

1°) a)

$$\begin{aligned}
\det(A-\alpha I_3) &= \begin{vmatrix} -2-\alpha & 5 & 2 \\ -1 & 4-\alpha & 2 \\ 2 & -10 & -5-\alpha \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1-\alpha & 1+\alpha & 0 \\ -1 & 4-\alpha & 2 \\ 2 & -10 & -5-\alpha \end{vmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&= (1+\alpha)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4-\alpha & 2 \\ 2 & -10 & -5-\alpha \end{vmatrix} \qquad \text{par linéarité par rapport à } L_1 \\
&= (1+\alpha)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3-\alpha & 2 \\ 2 & -8 & -5-\alpha \end{vmatrix} \qquad C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\
&= -(1+\alpha)\begin{vmatrix} 3-\alpha & 2 \\ -8 & -5-\alpha \end{vmatrix} \qquad \text{en développant par rapport à la première ligne} \\
&= -(1+\alpha)((\alpha-3)(5+\alpha)+16) = (-1+\alpha)(\alpha^2+2\alpha+1) \\
&= \boxed{-(1+\alpha)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f-\alpha\,\mathrm{id} \text{ est non injective } &\iff f-\alpha\,\mathrm{id} \text{ est non bijective} \\
&\quad \text{car } f-\alpha\,\mathrm{id} \text{ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie} \\
&\iff \det(f-\alpha\,\mathrm{id}) = 0 \\
&\iff \det(A-\alpha I_3) = 0 \\
&\iff \boxed{\alpha = -1}
\end{aligned}$$

b) Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}) &\iff (f+\mathrm{id})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff (A+I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -10 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \boxed{-x+5y+2z=0} \\
&\iff x = 5y+2z
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}) = \{(5y+2z,y,z)/(y,z)\in\mathbb{R}^2\} = \boxed{\mathrm{Vect}((5,1,0),(2,0,1))}$.
Les vecteurs $(5,1,0)$ et $(2,0,1)$ forment une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})$. De plus, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre de $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})$. C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})$. Il vient $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}))=2}$ i.e. $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})$ est un plan vectoriel.
$\boxed{u_3=(2,0,1)\in\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})}$ puisque c'est un vecteur de la famille génératrice précédente.

c) $u_1 = e_1 = (1,0,0)$. $u_2 = (f+\mathrm{id})(u_1) = f(u_1)+u_1 = f(e_1)+e_1$.
Pour calculer $f(e_1)$, il suffit de lire la première colonne de A :
$u_2 = f(e_1)+e_1 = (-2,-1,2)+(1,0,0) = (-1,-1,2)$.
u_2 vérifie l'équation $-x+5y+2z=0$ donc $\boxed{u_2 \text{ est dans } \mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})}$.

d) La matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(P) = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la première colonne.

$\det P = -1$ donc $\det P \neq 0$ donc $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$ (et, par ailleurs, P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$).

2°) a) u_2 et u_3 sont dans $\mathrm{Ker}(f+Id)$ donc $f(u_2) = -u_2$ et $f(u_3) = -u_3$.
$u_2 = f(u_1)+u_1$ donc $f(u_1) = -u_1+u_2$.
On en déduit que la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

b) Par la question 1d), $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$

Calculons P^{-1} par opérations élémentaires sur les lignes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \qquad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) Comme P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, $\underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{mat}}(f) = P^{-1}\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f)P$ i.e. $\boxed{T = P^{-1}AP}$.

3°) a) $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve $\boxed{J^2 = 0}$.

b) *Méthode 1* : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n : T^n = (-1)^n(I_3 - nJ)$.
★ Pour $n = 1, (-1)^1(I_3 - J) = J - I_3 = T$ donc H_1 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose H_n vraie.

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^n \times T \\ &= (-1)^n (I_3 - nJ)(J - I_3) \\ &= (-1)^n (J - I_3 - nJ^2 + nJ) \\ &= (-1)^{n+1}(I_3 - (n+1)J) \text{ car } J^2 = 0 \end{aligned}$$

Donc H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, T^n = (-1)^n (I_3 - nJ)}$$

Méthode 2 : $T = J + (-I_3)$.
Comme les matrices J et $-I_3$ commutent, par la formule du binôme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} T^n &= (J - I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (-I_3)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k \qquad \text{car } J^2 = 0 \text{ donc } J^k = 0 \text{ pour } k \geq 2 \\ &= (-1)^n J^0 + n(-1)^{n-1} J \end{aligned}$$

$$\boxed{T^n = (-1)^n (I_3 - nJ)}$$

c) $T = P^{-1}AP$ donc $A = PTP^{-1}$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n : A^n = PT^nP^{-1}$.

★ H_1 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que H_n est vraie.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PT^nP^{-1}PTP^{-1} \\ &= PT^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Donc H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = PT^nP^{-1}$.

$$\begin{aligned} A^n &= (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= (-1)^n \begin{pmatrix} 1+n & -1 & 2 \\ n & -1 & 0 \\ -2n & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1+n & -5n & -2n \\ n & 1-5n & -2n \\ -2n & 10n & 4n+1 \end{pmatrix}}$$

4°) a)

$$(x,y,z) \text{ est solution de } (S) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(x,y,z) \text{ est solution de } (S) \iff \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)}$$

b) Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après les formules de changement de base, on a $\boxed{X(t) = PY(t)}$.

En multipliant à gauche par P^{-1} : $\boxed{Y(t) = P^{-1}X(t)}$, i.e. $\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(t) = x(t) - 5y(t) - 2z(t)$. Ainsi, $\alpha = x - 5y - 2z$.

Donc $\boxed{\alpha \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables.

De même, $\boxed{\beta \text{ et } \gamma \text{ sont dérivables sur } \mathbb{R}.}$

Retour à $X(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$.

Le développement du produit matriciel donne en première composante : $x = \alpha - \beta + 2\gamma$.

Par dérivation d'une combinaison linéaire : $x' = \alpha' - \beta' + 2\gamma'$.

De même, pour les 2 autres composantes. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\boxed{X'(t) = PY'(t)}$.

c)

$$\begin{aligned} (S) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, PY'(t) = APY(t) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = P^{-1}APY(t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{l'implication} \Longrightarrow \text{ s'obtient en multipliant les 2 membres à gauche par } P^{-1} \\ \text{l'implication} \Longleftarrow \text{ s'obtient en multipliant les 2 membres à gauche par } P \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = TY(t) \\ &\iff \boxed{(S') : \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha'(t) = -\alpha(t) \\ \beta'(t) = \alpha(t) - \beta(t) \\ \gamma'(t) = -\gamma(t) \end{cases}} \end{aligned}$$

d) $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = PY(t)$ et $Y(t) = P^{-1}X(t)$. On a alors :

$$\begin{aligned} x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 1 &\iff X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff Y(0) = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \alpha(0) \\ \beta(0) \\ \gamma(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{(S) \text{ avec } x(0)=y(0)=0, z(0)=1 \iff (S') \text{ avec } \alpha(0)=-2, \beta(0)=0, \gamma(0)=1}$.

e) D'après l'équivalence de la question précédente, tout revient à résoudre :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha'(t) = -\alpha(t) \\ \beta'(t) = \alpha(t) - \beta(t) \\ \gamma'(t) = -\gamma(t) \\ \alpha(0) = -2, \beta(0) = 0, \gamma(0) = 1 \end{cases}$$

- Commençons par :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha'(t) = -\alpha(t) \\ \alpha(0) = -2 \end{cases} &\iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha(t) = \lambda e^{-t} \\ \alpha(0) = -2 \end{cases} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha(t) = -2e^{-t} \end{aligned}$$

- De même,

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ \gamma'(t) = -\gamma(t) \\ \gamma(0) = 1 \end{cases} \iff \forall t \in \mathbb{R},\ \gamma(t) = e^{-t}$$

- Il reste maintenant à résoudre : $\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ \beta'(t) = -2e^{-t} - \beta(t) \\ \beta(0) = 0 \end{cases}$.

  Les solutions de l'équation homogène associée à l'équation $\beta'(t) + \beta(t) = -2e^{-t}$ sont les $t \mapsto \lambda e^{-t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
  On pose : $\beta : t \mapsto \lambda(t)e^{-t}$ où $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable.
  Alors β est dérivable et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\beta'(t) = \lambda'(t)e^{-t} - \lambda(t)e^{-t}$.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ \beta'(t) + \beta(t) = -2e^{-t} &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t)e^{-t} = -2e^{-t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t) = -2 \end{aligned}$$

  En prenant $\lambda : t \mapsto -2t$, on obtient donc que $t \mapsto -2te^{-t}$ est solution particulière de l'équation $\beta'(t) + \beta(t) = -2e^{-t}$. Donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ \beta'(t) + \beta(t) = -2e^{-t} \\ \beta(0) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \beta(t) = \lambda e^{-t} - 2te^{-t} \\ \beta(0) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \beta(t) = \lambda e^{-t} - 2te^{-t} \\ \lambda = 0 \end{cases} \\ &\iff \forall\, t \in \mathbb{R},\ \beta(t) = -2te^{-t} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x,y,z) \text{ solution de (S)} \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1 \end{cases} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha(t) = -2e^{-t} \\ \beta(t) = -2te^{-t} \\ \gamma(t) = e^{-t} \end{cases} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ -2te^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} \\ &\qquad \text{car pour tout } t \in \mathbb{R},\ X(t) = PY(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{cases} (x,y,z) \text{ solution de (S)} \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1 \end{cases} \iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = 2te^{-t} \\ y(t) = 2te^{-t} \\ z(t) = (1-4t)e^{-t} \end{cases}}$$

Exercice 3

$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, $\dfrac{3}{(x^2+x+1)} = a(x+2)+b+\dfrac{(cx+d)(x+2)^2}{x^2+x+1}$, donc, en évaluant en -2 ou plutôt en passant à la limite $x \to -2$, $\dfrac{3}{3} = b$ donc $\boxed{b=1}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, $\dfrac{3x}{(x^2+x+1)(x+2)^2} = \dfrac{ax}{x+2}+\dfrac{bx}{(x+2)^2}+\dfrac{(cx+d)x}{x^2+x+1}$, donc, en passant à la limite $x \to +\infty$, $0 = a+0+c$ donc $a+c=0$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, $\dfrac{3}{(x+2)^2} = \dfrac{a(x^2+x+1)}{x+2}+\dfrac{b(x^2+x+1)}{(x+2)^2}+cx+d$.

Les racines dans $\mathbb{C}$ de x^2+x+1 sont j et $\overline{j}$. On s'autorise à évaluer l'égalité précédente en $j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{(j+2)^2} &= 0+0+cj+d \\
\frac{3}{j^2+4j+4} &= cj+d \\
\frac{3}{3j+3} &= cj+d \qquad \text{car } j^2+j+1=0 \\
\frac{1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1} &= c\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+d \\
\frac{2}{1+i\sqrt{3}} &= -\frac{c}{2}+d+i\frac{\sqrt{3}}{2}c \\
\frac{2(1-i\sqrt{3})}{4} &= -\frac{c}{2}+d+i\frac{\sqrt{3}}{2}c
\end{aligned}$$

Par unicité de la partie réelle et imaginaire d'un complexe, on obtient : $\dfrac{1}{2} = -\dfrac{c}{2}+d$ et $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$
D'où $\boxed{c=-1}$ puis $\boxed{d=0}$.
Comme $a+c=0$, on obtient $\boxed{a=1}$.