Devoir maison 12.

À rendre le lundi 5 mai 2025

Exercice 1

Lire la vidéo et remplir la fiche sur la décomposition en éléments simples avant de faire cet exercice

Décomposer en éléments simples la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^5 + 6x^4 - x^3 - 4x^2 - x - 1}{x(x-1)(x+3)}$.

Exercice 2

Dans ce problème, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ sera noté id.
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

1°) a) Calculer $\det(A - \alpha I_3)$ où α est un réel.
En déduire que $f - \alpha\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est non injective si et seulement si $\alpha = -1$.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$. Quelle est sa dimension ?
Vérifier que $u_3 = (2, 0, 1) \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$.

c) On pose $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (f + \mathrm{id})(u_1)$. Justifier que $u_2 \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$.

d) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2°) a) Soit T la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Justifier (avec un minimum de calculs) que $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Écrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.

c) Quelle est la relation entre A et T ?

3°) *Première application* : Calcul de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose $J = I_3 + T$.

a) Calculer J^2.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T^n = (-1)^n(I_3 - nJ)$.

c) En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel n non nul.

4°) *Deuxième application* : Résolution d'un système différentiel.

On s'intéresse au système d'équations différentielles :

$$(S) : \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & -2x(t) + 5y(t) + 2z(t) \\ y'(t) & = & -x(t) + 4y(t) + 2z(t) \\ z'(t) & = & 2x(t) - 10y(t) - 5z(t) \end{array} \right.$$

On fixe alors dans la suite des fonctions x, y, z de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$.

On note, pour $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées du triplet $(x(t), y(t), z(t))$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

On note également, pour $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

a) Écrire une égalité matricielle équivalente au fait que (x, y, z) est solution de (S).

b) Soit $t \in \mathbb{R}$.

On écrit le triplet $(x(t), y(t), z(t))$ dans la base $\mathcal{B}'$: on note alors $(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ la liste de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$.

On note alors $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$.

Écrire $X(t)$ en fonction de $Y(t)$ et $Y(t)$ en fonction de $X(t)$.

Justifier que les fonctions α, β, γ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exprimer $X'(t)$ en fonction de $Y'(t)$.

c) Montrer que : (x, y, z) est solution de (S) si et seulement si (α, β, γ) est solution d'un système (S') plus simple que l'on déterminera.

d) Déterminer un problème de Cauchy sur les fonctions α, β, γ équivalent au problème de Cauchy donné par (S) et les conditions initiales $x(0) = y(0) = 0$ et $z(0) = 1$.

e) Déterminer alors les solutions (x, y, z) de (S) vérifiant $x(0) = y(0) = 0$ et $z(0) = 1$.

Exercice 3

Exercice facultatif !

On admet qu'il existe d'uniques réels a, b, c et d tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}, \ \frac{3}{(x^2 + x + 1)(x + 2)^2} = \frac{a}{x + 2} + \frac{b}{(x + 2)^2} + \frac{cx + d}{x^2 + x + 1}.$$

Déterminer a, b, c, d.