Corrigé du devoir maison 11.

1°) Soit $i \in \{1,2,3\}$. X_i est le nombre de "succès" lors de la répétition de $2p+1$ expériences aléatoires indépendantes (les $2p+1$ lancers de pièce successifs), où un "succès" pour un lancer est "le résultat est conforme à la prévision du joueur J_i", ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Donc $\boxed{X_i \text{ suit la loi binomiale de paramètres } 2p+1 \text{ et } \frac{1}{2}}$.

2°) Comme $X_1(\Omega) = \{0, \dots, 2p+1\}$, $\boxed{r_{-1} = P(X_1 \leq -1) = 0}$ et $\boxed{r_{2p+1} = P(X_1 \leq 2p+1) = 1}$.

3°) Soit $k \in \{0, \dots, p\}$.

D'une part, $P(X_1 = k) = \binom{2p+1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2p+1-k} = \binom{2p+1}{k} \frac{1}{2^{2p+1}}$.

D'autre part, $P(X_1 = 2p+1-k) = \binom{2p+1}{2p+1-k} \frac{1}{2^{2p+1}} = \binom{2p+1}{k} \frac{1}{2^{2p+1}}$.

Ainsi on a bien $\boxed{P(X_1 = k) = P(X_1 = 2p+1-k)}$.

Autre méthode : $2p+1-X_1$ est le nombre de succès (« le résultat n'est pas conforme à la prévision du joueur J_1 ») dans la répétition de $2p+1$ épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès $\frac{1}{2}$. Donc $2p+1-X_1 \sim \mathcal{B}\left(2p+1, \frac{1}{2}\right)$. Donc X_1 et $2p+1-X_1$ suivent la même loi. Ainsi, pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$, $P(X_1 = k) = P(2p+1-X_1 = k)$ donc $P(X_1 = k) = P(X_1 = 2p+1-k)$.

Ensuite, $P(X_1 \leq p) = \sum_{k=0}^{p} P(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{p} P(X_1 = 2p+1-k)$.

On effectue alors le changement d'indice $j = 2p+1-k$: quand k vaut 0, j vaut $2p+1$, et quand k vaut p, j vaut $p+1$ donc :

$$P(X_1 \leq p) = \sum_{j=p+1}^{2p+1} P(X_1 = k) = P(X_1 \geq p+1).$$

Or $(X_1 \geq p+1)$ est l'événement contraire de $(X_1 \leq p)$ donc :

$$\begin{aligned} P(X_1 \geq p+1) + P(X_1 \leq p) &= 1 \\ 2P(X_1 \leq p) &= 1 \\ \boxed{r_p = P(X_1 \leq p) = \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

4°) Soit $k \in \{0, \dots, 2p+1\}$. Alors $(X_1 = k) = (X_1 \leq k) \backslash (X_1 \leq k-1)$.
Comme $(X_1 \leq k-1) \subset (X_1 \leq k)$, on en tire $P(X_1 = k) = P(X_1 \leq k) - P(X_1 \leq k-1)$ i.e. $\boxed{P(X_1 = k) = r_k - r_{k-1}}$.

5°) $\boxed{G_1(\Omega) = \left\{0, \frac{\tau}{3}, \frac{\tau}{2}, \tau\right\}}$, car J_1 peut n'avoir aucun gain s'il ne gagne pas, et son gain peut être τ s'il est le seul gagnant, mais aussi $\frac{\tau}{2}$ ou $\frac{\tau}{3}$ s'il y a d'autres gagnants.

6°) a) Sachant $(X_1 = k)$, J_1 a fait k prévisions correctes exactement ; l'événement $(G_1 = \tau)$ est alors réalisé si et seulement il est le seul gagnant, c'est-à-dire si et seulement si tous les autres ont fait strictement moins de prévisions correctes. Ainsi :

$$\begin{aligned} P_{(X_1=k)}(G_1 = \tau) &= P_{(X_1=k)}\left((X_2 \leq k-1) \cap (X_3 \leq k-1)\right) \\ &= P\left((X_2 \leq k-1) \cap (X_3 \leq k-1)\right) \quad \text{car } X_1,\ X_2 \text{ et } X_3 \text{ sont indépendantes} \\ &= P(X_2 \leq k-1)P(X_3 \leq k-1) \quad \text{car } X_2 \text{ et } X_3 \text{ sont indépendantes} \\ &= r_{k-1}r_{k-1} \end{aligned}$$

$\boxed{P_{(X_1=k)}(G_1 = \tau) = r_{k-1}^2}$

b) Les événements $(X_1 = k)$ pour $k \in \{0, \ldots, 2p+1\}$ forment un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(G_1 = \tau) = \sum_{k=0}^{2p+1} P(X_1 = k)P_{(X_1=k)}(G_1 = \tau)$$

$$\boxed{P(G_1 = \tau) = \sum_{k=0}^{2p+1} (r_k - r_{k-1})r_{k-1}^2} \quad \text{d'après les questions 4 et 6a}$$

7°)

$$\begin{aligned} E(G_1) &= 0.P(G_1 = 0) + \tau P\left(G_1 = \tau\right) + \frac{\tau}{2}P\left(G_1 = \frac{\tau}{2}\right) + \frac{\tau}{3}P\left(G_1 = \frac{\tau}{3}\right) \\ &= \tau \sum_{k=0}^{2p+1} (r_k - r_{k-1}) \left[r_{k-1}^2 + \frac{1}{2}(2r_kr_{k-1} - 2r_{k-1}^2) + \frac{1}{3}(r_k - r_{k-1})^2\right] \\ &= \tau \sum_{k=0}^{2p+1} (r_k - r_{k-1}) \left(r_kr_{k-1} + \frac{1}{3}r_k^2 + \frac{1}{3}r_{k-1}^2 - \frac{2}{3}r_kr_{k-1}\right) \\ &= \frac{\tau}{3} \sum_{k=0}^{2p+1} (r_k - r_{k-1}) \left(r_k^2 + r_kr_{k-1} + r_{k-1}^2\right) \\ &= \frac{\tau}{3} \sum_{k=0}^{2p+1} (r_k^3 - r_{k-1}^3) \\ &= \frac{\tau}{3}(r_{2p+1}^3 - r_{-1}^3) \quad \text{(somme télescopique)} \end{aligned}$$

$\boxed{E(G_1) = \frac{\tau}{3}}$ en utilisant la question 2.

8°) Comme les trois joueurs vont toujours se répartir la somme de τ euros, on a toujours $G_1 + G_2 + G_3 = \tau$.
Par linéarité de l'espérance, $E(G_1) + E(G_2) + E(G_3) = \tau$.
Mais les rôles des trois joueurs sont symétriques donc $E(G_1) = E(G_2) = E(G_3)$, d'où finalement : $\boxed{E(G_1) = E(G_2) = E(G_3) = \frac{\tau}{3}.}$

9°) Pour chacun des lancers, ou bien la prévision de J_1 est correcte et celle de J_2 est fausse, ou bien la prévision de J_2 est correcte et celle de J_1 est fausse. Donc en additionnant le nombre de prévisions correctes de ces deux joueurs, on obtient le nombre total de lancers, i.e : $\boxed{X_1 + X_2 = 2p+1}$.

10°) • Si on avait $X_1 = X_2$, $X_1 + X_2$ serait pair : impossible puisque $X_1 + X_2 = 2p+1$ est impair. Donc $\boxed{X_1 \text{ ne peut être égal à } X_2}$. En particulier, J_1 et J_2 ne peuvent pas être tous les deux gagnants.

• Si $X_1 \geq p+1$, alors $X_2 = 2p+1-X_1 \leq p$ donc le plus grand est X_2 qui est bien supérieur à $p+1$ (et inférieur à $2p+1$).
Si $X_1 \leq p$ alors $X_2 = 2p+1-X_1 \geq p+1$ donc le plus grand est X_1 qui est bien supérieur à $p+1$ (et inférieur à $2p+1$).
Donc $\boxed{Y = \max(X_1, X_2) \text{ est bien à valeurs dans } \{p+1, \ldots, 2p+1\}}$.

• Si J_1 et J_2 perdent, on a $S = 0 + 0 = 0$.
Si l'un gagne, alors l'autre perd, donc soit J_3 est également gagnant et alors $S = \dfrac{\tau}{2} + 0 = \dfrac{\tau}{2}$, soit J_3 perd et alors $S = \tau + 0 = \tau$.
Ainsi, on a bien $\boxed{S(\Omega) = \left\{0, \frac{\tau}{2}, \tau\right\}.}$.

11°) Soit $k \in \{p+1, \ldots, 2p+1\}$.
$(Y = k) = [(X_1 = k) \cap (X_2 \leq k-1)] \cup [(X_2 = k) \cap (X_1 \leq k-1)]$.
Or , si $X_1 = k$ alors $X_1 \geq p+1$ et donc $X_2 = 2p+1-X_1 \leq p$ donc $X_2 \leq k-1$.
De même, si $X_2 = k$ alors $X_1 \leq k-1$.
Donc, $(Y = k) = (X_1 = k) \cup (X_2 = k)$.
Comme X_1 et X_2 ne peuvent être égaux d'après la question précédente, cette réunion est disjointe. D'où :

$$\begin{aligned}
P(Y = k) &= P(X_1 = k) + P(X_2 = k) \\
&= P(X_1 = k) + P(X_1 = 2p+1-k) \quad \text{car } X_1 + X_2 = 2p+1 \\
&= 2P(X_1 = k) \quad \text{d'après la question 3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(Y = k) = 2(r_k - r_{k-1})} \quad \text{d'après la question 4}$$

12°) Soit $k \in \{p+1, \ldots, 2p+1\}$.
Sachant $(Y = k)$, $\left(S = \dfrac{\tau}{2}\right)$ est réalisé si et seulement si J_3 a k prévisions correctes, donc :

$$\begin{aligned}
P_{(Y=k)}\left(S = \frac{\tau}{2}\right) &= P_{(Y=k)}(X_3 = k) \\
&= P(X_3 = k) \quad \text{car } X_3 \text{ est indépendant de } X_1 \text{ et } X_2 \text{ donc de } Y
\end{aligned}$$

$$\boxed{P_{(Y=k)}\left(S = \frac{\tau}{2}\right) = r_k - r_{k-1}}$$

Sachant $(Y = k)$, $(S = \tau)$ est réalisé si et seulement si J_3 a au plus $k-1$ prévisions correctes, donc :

$$\begin{aligned}
P_{(Y=k)}(S = \tau) &= P_{(Y=k)}(X_3 \leq k-1) \\
&= P(X_3 \leq k-1) \quad \text{car } X_3 \text{ est indépendant de } X_1 \text{ et } X_2 \text{ donc de } Y
\end{aligned}$$

$$\boxed{P_{(Y=k)}(S = \tau) = r_{k-1}}$$

13°) Les événements $(Y = k)$ pour $k \in \{p+1, \ldots, 2p+1\}$ forment un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P\left(S = \frac{\tau}{2}\right) = \sum_{k=p+1}^{2p+1} P(Y = k) P_{(Y=k)}\left(S = \frac{\tau}{2}\right) = \sum_{k=p+1}^{2p+1} 2(r_k - r_{k-1})^2$$

De même :

$$P\left(S=\tau\right)=\sum_{k=p+1}^{2p+1}P(Y=k)P_{(Y=k)}\left(S=\tau\right)=\sum_{k=p+1}^{2p+1}2(r_k-r_{k-1})r_{k-1}$$

On en tire :

$$\begin{aligned}
E(S)&=0.P(S=0)+\frac{\tau}{2}P\left(S=\frac{\tau}{2}\right)+\tau P(S=\tau)\\
&=\sum_{k=p+1}^{2p+1}\tau(r_k-r_{k-1})^2+\sum_{k=p+1}^{2p+1}2\tau(r_k-r_{k-1})r_{k-1}\\
&=\tau\sum_{k=p+1}^{2p+1}\left(r_k-r_{k-1}\right)\left(r_k-r_{k-1}+2r_{k-1}\right)\\
&=\tau\sum_{k=p+1}^{2p+1}\left(r_k-r_{k-1}\right)\left(r_k+r_{k-1}\right)\\
&=\tau\sum_{k=p+1}^{2p+1}\left(r_k^2-r_{k-1}^2\right)\\
\boxed{E(S)=\tau(r_{2p+1}^2-r_p^2)}&\quad\text{(somme télescopique)}
\end{aligned}$$

En utilisant la question 2 et la question 3, on obtient donc $E(S)=\tau\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3\tau}{4}$.

Donc, $E(G_1)=E(G_2)=\frac{E(S)}{2}=\frac{3\tau}{8}$.

Comme $9>8$, on a $\frac{3}{8}>\frac{1}{3}$ donc c'est bien strictement supérieur à l'espérance du gain avec la première stratégie.

$\boxed{\text{La deuxième stratégie est plus intéressante pour les joueurs } J_1 \text{ et } J_2}$.