Corrigé du devoir maison 10.

1°) Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Supposons que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a\sin x + bx\sin x + c\cos x + dx\cos x = 0$.
En particulier, pour $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{\pi}{4}$, on obtient les 4 relations suivantes :

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b\dfrac{\pi}{2} = 0 \\ -a + b\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)(-1) = 0 \\ \dfrac{a}{\sqrt{2}} + \dfrac{b\pi}{4\sqrt{2}} + \dfrac{c}{\sqrt{2}} + \dfrac{d\pi}{4\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} c = 0 \\ 2a = 0 \\ 2b\dfrac{\pi}{2} = 0 \\ \dfrac{a}{\sqrt{2}} + \dfrac{b\pi}{4\sqrt{2}} + \dfrac{d\pi}{4\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} c = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est libre. De plus, c'est une famille génératrice de F. On en déduit que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } F}$. Donc, $\boxed{\dim(F) = 4}$.

2°) a) Soit $f \in F$ et $x \in \mathbb{R}$. d s'applique à une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
f est une fonction et $f(x)$ est un réel.
Ainsi, $d(f)$ a un sens et $\boxed{d(f(x)) \text{ n'a pas de sens}}$, et comme $d(f)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, $\boxed{d(f)(x) \text{ a un sens}}$.

b) ★ Soit $(f_1, f_2) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $d(\lambda f_1 + f_2) = (\lambda f_1 + f_2)' = \lambda f_1' + f_2' = \lambda d(f_1) + d(f_2)$.
Ainsi, d est linéaire.
Montrons que : $\forall f \in F$, $d(f) \in F$, i.e. $\mathrm{Im}(d) \subset F$.
Il suffit de montrer que : $\forall i \in \{1, \dots, 4\}$, $d(f_i) \in F$.
(Car, comme F est un sous-espace vectoriel de E, il contiendra toutes les combinaisons linéaires des $d(f_i)$ i.e. il contiendra $\mathrm{Im}(d) = \mathrm{Vect}(d(f_1), d(f_2), d(f_3), d(f_4))$).
$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d(f_1)(x) &= f_1'(x) = \cos x \\ d(f_2)(x) &= f_2'(x) = \sin x + x\cos x \\ d(f_3)(x) &= f_3'(x) = -\sin x \\ d(f_4)(x) &= f_4'(x) = \cos x - x\sin x \end{aligned}$$

Ainsi, $d(f_1) = f_3,\ d(f_2) = f_1 + f_4,\ d(f_3) = -f_1$ et $d(f_4) = -f_2 + f_3$.
Ainsi, tous les $d(f_i)$ sont dans F.
Donc F est stable par d.
On en déduit que $\boxed{d \in \mathcal{L}(F)}$.

★ Comme $d(f_1) = f_3,\ d(f_2) = f_1 + f_4,\ d(f_3) = -f_1$ et $d(f_4) = -f_2 + f_3$, la matrice de d dans $\mathcal{B}$ est :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

3°) a) On effectue des opérations élémentaires sur les lignes.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_4 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow -L_4 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_4 \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boxed{D \text{ est inversible et } D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

b) D est inversible donc d est bijective de F dans F.
On remarque que $g = 2f_2 - 3f_4$. Donc $g \in F$.
Ainsi, $\exists! f \in F$ tel que $d(f) = g$ i.e. tel que $f' = g$.
$\boxed{\text{Il existe bien une unique fonction } f \text{ de } F \text{ telle que } f \text{ est une primitive de } g}$.

f est nécessairement $d^{-1}(g)$. On note $f = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Matriciellement, on a : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

D'où $a = 2, b = -3, c = -3, d = -2$.
Ainsi, $f = 2f_1 - 3f_2 - 3f_3 - 2f_4$ i.e. $\boxed{\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2\sin x - 3x\sin x - 3\cos x - 2x\cos x \end{array}}$.

4°) a) La matrice de $h = d^2 + \mathrm{id}_F$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\boxed{D^2 + I_4}$.

Or $D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{D^2 + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

b) $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}(h(f_1), h(f_2), h(f_3), h(f_4))$ car (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de F.
Or $h(f_1) = h(f_3) = 0$ et $h(f_2) = 2f_3$ et $h(f_4) = -2f_1$.
Ainsi, $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}(2f_3, -2f_1)$ donc $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}(f_1, f_3)$.
(f_1, f_3) est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(h)$ et c'est une famille libre (car sous-famille d'une base) donc $\boxed{(f_1, f_3) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(h)}$.

c) $h(f_1) = h(f_3) = 0$ donc f_1 et f_3 sont dans $\mathrm{Ker}(h)$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(f_1, f_3) \subset \mathrm{Ker}(h)$.
Donc, $\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Ker}(h)$ par la question précédente.
De plus, par le théorème du rang appliqué à $h \in \mathcal{L}(F)$:
$\dim(F) = \dim(\mathrm{Ker}(h)) + \dim(\mathrm{Im}(h))$.
Donc, $\dim(\mathrm{Ker}(h)) = 4 - 2 = 2$.
On a : $\dim(\mathrm{Ker}(h)) = \dim(\mathrm{Im}(h))$ et $\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Ker}(h)$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Ker}(h)}$.

d) $\forall u \in F$, $h(u) \in \mathrm{Im}(h)$ donc $h(u)\,\mathrm{Ker}(h)$ donc $h(h(u)) = 0$ i.e. $h^2(u) = 0$.
Ainsi, $h^2 = 0$, ce qui signifie $(d^2 + \mathrm{id}_F)^2 = 0$.
En passant aux matrices, on en déduit : $\boxed{(D^2 + I_4)^2 = 0}$.

e) On sait, par la question précédente que : $(D^2 + I_4)^2 = 0$.
Comme D^2 et I_4 commutent, $D^4 + 2D^2 + I_4 = 0$, ce qui s'écrit : $I_4 = -D^4 - 2D^2$.
Donc $I_4 = D \times (-D^3 - 2D) = (-D^3 - 2D) \times D$.
Donc $\boxed{D \text{ est inversible et } D^{-1} = -D^3 - 2D}$.

5°) a) V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donc $\boxed{\text{c'est un espace vectoriel}}$, et (I_4, D^2) en est une famille génératrice.
$D^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et I_4 ne sont pas colinéaires donc (I_4, D^2) forme une famille libre de V. C'est donc une base de V. Ainsi, $\boxed{\dim(V) = 2}$.

b) Soit $(A, B) \in V^2$. Montrons que $A \times B \in V$.
A et B s'écrivent : $A = \alpha I_4 + \beta D^2$ et $B = \alpha' I_4 + \beta' D^2$ où $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \in \mathbb{R}^4$.
On rappelle que, par 4d, $(D^2 + I_4)^2 = 0$ donc $D^4 + 2D^2 + I_4 = 0$.

$$\begin{aligned} A \times B &= (\alpha I_4 + \beta D^2) \times (\alpha' I_4 + \beta' D^2) \\ &= \alpha\alpha' I_4 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)D^2 + \beta\beta' D^4 \\ &= \alpha\alpha' I_4 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)D^2 + \beta\beta'(-I_4 - 2D^2) \\ &= (\alpha\alpha' - \beta\beta')I_4 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta - 2\beta\beta')D^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $A \times B \in V$.
$\boxed{V \text{ est stable par multiplication}}$.

c) Soit $A \in V$. A s'écrit $A = \alpha I_4 + \beta D^2$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha-\beta & 0 & 0 & -2\beta \\ 0 & \alpha-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta & \alpha-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-\beta) \begin{vmatrix} \alpha-\beta & 0 & 0 \\ 2\beta & \alpha-\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\beta \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à la 1ere colonne}$$

$$= (\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^3 \text{ (déterminant d'une matrice triangulaire)}$$

$$= (\alpha-\beta)^4$$

Ainsi, $\boxed{A \text{ et inversible si et seulement si } \alpha \neq \beta}$.

d) Soit $A \in V$. On suppose A inversible.

★ Soit $(M_1, M_2) \in V^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\varphi(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda A M_1 + A M_2 = \lambda\varphi(M_1) + \varphi(M_2)$
Donc, φ est linéaire.
Comme V est stable par produit, on a bien : $\forall M \in V$, $\varphi(M) \in V$.
Ainsi, $\underline{\varphi \in \mathcal{L}(V)}$.

★ Montrons que φ est injectif i.e. $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$.
On a déjà : $\{0\} \subset \text{Ker}(\varphi)$.
Soit $M \in \text{Ker}(\varphi)$. Montrons que $M = 0$.
$\varphi(M) = 0$ donc $AM = 0$. Or A est inversible donc A^{-1} existe.
On multiplie l'égalité $AM = 0$ à gauche par A^{-1} : $A^{-1} \times AM = A^{-1} \times 0$.
Donc $M = 0$.
Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$.
$\underline{\varphi \text{ est donc injectif}}$.

★ φ est un endomorphisme de V. De plus, φ est injectif et V est un espace vectoriel de dimension finie donc $\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } V}$.

★ Montrons que $A^{-1} \in V$.
φ est bijectif donc surjectif et $I_4 \in V$ donc $\exists M \in V$, $\varphi(M) = I_4$.
Donc $AM = I_4$.
A est inversible donc $A^{-1} \times AM = A^{-1} \times I_4$ i.e. $M = A^{-1}$ (on peut aussi conclure directement d'après une propriété du cours sur l'inversibilité à gauche).
Or $M \in V$ donc $\boxed{A^{-1} \in V}$.