Devoir maison 10.

À rendre le lundi 29 avril 2024

On considère E l'espace des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et les éléments de E suivants :

$$f_1 : x \mapsto \sin(x)\ ;\ f_2 : x \mapsto x\sin(x)\ ;\ f_3 : x \mapsto \cos(x)\ ;\ f_4 : x \mapsto x\cos(x).$$

On pose également $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1°) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de F.
Que peut-on en déduire pour F ?

2°) Pour $f \in F$, on pose $d(f) = f'$.

a) Soit $f \in F$ et $x \in \mathbb{R}$. Doit-on écrire $d(f)(x)$ ou $d(f(x))$?

b) Montrer que $d \in \mathcal{L}(F)$, et préciser la matrice D de d dans la base $\mathcal{B}$.

3°) **a)** Montrer que D est inversible et préciser son inverse.

b) *Application* : Soit $g : x \mapsto 2x\sin x - 3x\cos x$.
Justifier l'existence et l'unicité d'une primitive f de g qui soit aussi élément de F.
Déterminer cette primitive f.

4°) **a)** Déterminer la matrice de $h = d^2 + \mathrm{id}_F$ dans la base $\mathcal{B}$.

b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(h)$.

c) En déduire, presque sans calculs, que $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Im}(h)$.

d) Sans calcul matriciel, montrer que $(D^2 + I_4)^2 = 0$.

e) Retrouver que D est inversible et expliciter son inverse en fonction de D.

5°) On pose $V = \mathrm{Vect}(I_4, D^2)$.

a) Montrer que V est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

b) Montrer que V est stable par multiplication.

c) Soit $A \in V$; A s'écrit donc $A = \alpha I_4 + \beta D^2$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que A et inversible si et seulement si $\alpha \neq \beta$.
Remarque : On réfléchira bien à la méthode la plus efficace pour répondre à la question.

d) Soit $A \in V$. On suppose A inversible. On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ M & \mapsto & AM \end{array}$.
Montrer que φ est un automorphisme de V.
En déduire : $A^{-1} \in V$.