Devoir maison 9.

À rendre le jeudi 4 avril 2024

On ne se servira pas du théorème du rang dans cet exercice.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$f : P \mapsto X(P(X) - P(X-1)).$$

(Ici $P(X)$ désigne le polynôme P, et $P(X-1)$ désigne le polynôme P composé par le polynôme $X-1$.)

Question préliminaire : Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(X-1) = P(X)$. Justifier que P est un polynôme constant.

1°) Calculer $f(1), f(X), f(X^2)$.

2°) Déterminer, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, le degré de $f(X^k)$ en fonction de k.

3°) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4°) Déterminer le noyau de f.

5°) On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \ / \ P(0) = 0\}$, et :

$$P_1 = X,\ P_2 = X(1-X),\ P_3 = X(1-X)(2-X),\ \ \dots,\ \ P_n = X(1-X)(2-X)\dots(n-1-X).$$

a) Quelle inclusion simple a-t-on entre $\mathrm{Im}(f)$ et F ?

b) Déterminer une famille génératrice simple de F.

c) À l'aide d'une récurrence, montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\mathrm{Vect}\left(X, X^2, \dots, X^k\right) \subset \mathrm{Vect}\left(P_1, \dots, P_k\right).$$

d) Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $f(P_k) = kP_k$.

e) Déduire des questions précédentes que $\mathrm{Im}(f) = F$.

Question bonus :
Obtenir plus rapidement le résultat final de la question 5, Im$(f) = F$, en utilisant le théorème du rang.