Corrigé du devoir maison 8.

Exercice 1

Partie 1 : Exemple des matrices diagonales

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I^k = I$ donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} I^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} I = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) I = \begin{pmatrix} u_n & 0 & 0 \\ 0 & u_n & 0 \\ 0 & 0 & u_n \end{pmatrix} \text{ en notant } u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1 = e$, donc $\boxed{E(I) \text{ existe et } E(I) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.}$

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $O^k = O$ et $O^0 = I$, donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} O^k = \frac{1}{0!} I = I$.

Donc $\boxed{E(O) \text{ existe et } E(O) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

3°) Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on l'écrit $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ avec $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 \\ 0 & \mu^k & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^k \end{pmatrix}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\mu^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma^k}{k!} \end{pmatrix}$$

D'après l'énoncé, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^\lambda$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\mu^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^\mu$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^\gamma$, donc

$\boxed{E(D) \text{ existe et } E(D) = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & e^\mu & 0 \\ 0 & 0 & e^\gamma \end{pmatrix}.}$

Partie 2 : Un autre exemple

4°) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n : $A^n = nA - (n-1)I$.

- $A^0 = I$ et $0A - (0-1)I = I$, donc P_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons P_n vraie.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= (nA - (n-1)I)\,A \text{ par } P_n \\ &= nA^2 - (n-1)A \\ &= n(2A - I) - nA + A \\ &= (2n - n + 1)A - nI \\ &= (n+1)A - ((n+1)-1)\,I \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = nA - (n-1)I.}$

5°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,(kA - (k-1)I) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!}\right) A + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1-k}{k!}\right) I$$

Ainsi, $\boxed{\text{on a la forme voulue en posant } u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} \text{ et } v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1-k}{k!}}$.

6°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!}$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1 = e$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - u_n$, donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e - e = 0$.

D'après l'énoncé, on a donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k = u_n A + v_n I \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} eA + 0.I = eA$.

Ainsi $\boxed{E(A) \text{ existe et vaut } eA}$.

Partie 3 : Une matrice nilpotente

7°) $N^0 = I$, $N^1 = N$, $N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

$N^3 = NN^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{N^3 = 0}$.

Or, pour tout entier $k \geq 3$, $N^k = N^3 N^{k-3}$ donc $\boxed{N^k = 0}$.

8°) On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(tN)^k = t^k N^k$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(tN)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} N^k$.

Avec la question précédente, on obtient, pour $n \geq 2$,
$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(tN)^k = \frac{t^0}{0!} I + \frac{t^1}{1!} N + \frac{t^2}{2!} N^2 = I + tN + \frac{t^2}{2} N^2$.

Donc $\boxed{E(tN) \text{ existe, et vaut } I + tN + \frac{t^2}{2}N^2}$.

9°) Soit t et s des réels.

$$\begin{aligned} F(t)F(s) &= E(tN)E(sN) \\ &= \left(I + tN + \frac{t^2}{2}N^2\right)\left(I + sN + \frac{s^2}{2}N^2\right) \\ &= I + sN + \frac{s^2}{2}N^2 + tN + tsN^2 + \frac{ts^2}{2}N^3 + \frac{t^2}{2}N^2 + \frac{st^2}{2}N^3 + \frac{s^2t^2}{4}N^4 \\ &= I + (t+s)N + \left(\frac{s^2}{2} + \frac{t^2}{2} + st\right)N^2 \text{ car } N^3 = N^4 = O \\ &= I + (t+s)N + \frac{s^2+t^2+2st}{2}N^2 \\ &= I + (t+s)N + \frac{(t+s)^2}{2}N^2 \end{aligned}$$

$\boxed{F(t)F(s) = F(t+s)}$

10°) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a donc $F(t)F(-t) = F(t-t) = F(0) = E(O) = I$ d'après la question 2. De même, $F(-t)F(t) = F(0) = I$. Donc, $\boxed{F(t) \text{ est inversible et que } (F(t))^{-1} = F(-t)}$.

11°) Soit $t \in \mathbb{R}$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n : (F(t))^n = F(nt)$.

- $(F(t))^0 = I$, et $F(0.t) = F(0) = E(O) = I$, donc P_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons P_n vraie.

$$\begin{aligned} F((n+1)t) &= F(nt+t) \\ &= F(nt)F(t) \text{ d'après la question 9} \\ &= (F(t))^n F(t) \text{ par } P_n \\ &= (F(t))^{n+1} \end{aligned}$$

  Donc P_{n+1} est vraie.
- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Soit $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} F(t)^{-n} &= (F(t)^{-1})^n \\ &= (F(-t))^n \text{ par la question précédente} \\ &= F(-nt) \text{ puisque } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{Z},\ (F(t))^n = F(nt).}$

12°) Soit t et s des réels, supposons que $F(t) = F(s)$.

On a donc $I + tN + \frac{t^2}{2}N^2 = I + sN + \frac{s^2}{2}N^2$, donc $tN + \frac{t^2}{2}N^2 = sN + \frac{s^2}{2}N^2$, ce qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} t & 0 & t \\ -\frac{t^2}{2} & 0 & t - \frac{t^2}{2} \\ -t & 0 & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 & s \\ -\frac{s^2}{2} & 0 & s - \frac{s^2}{2} \\ -s & 0 & -s \end{pmatrix}$$

D'où $s = t$ (en considérant par exemple le coefficient $(1,1)$).

Ainsi, $\boxed{F \text{ est bien injective}}$.

Partie 4 : Un résultat général sur les matrices nilpotentes

13°) $p+q-1$ est un entier ≥ 1. Calculons maintenant $(A+B)^{p+q-1}$ par la formule du binôme puisque A et B commutent.

$$\begin{aligned}(A+B)^{p+q-1} &= \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k} + \sum_{k=p}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k}\end{aligned}$$

Si $k \geq p$ alors $A^k = 0$ puisque A est nilpotente d'indice p. D'où, $A^k B^{p+q-1-k} = 0$.
Si $0 \leq k \leq p-1$ alors $0 \leq p-1-k$ d'où $q \leq p+q-1-k$.
Or B est nilpotente d'indice q donc $B^{p+q-1-k} = 0$. D'où $A^k B^{p+q-1-k} = 0$.
Finalement, chaque terme de la somme est nul donc $(A+B)^{p+q-1} = 0$.
Ainsi $\boxed{A+B \text{ est nilpotente et son indice est inférieur ou égal à } p+q-1}$.

14°) On a $p+q-2 \geq 0$. Calculons :

$$\sum_{k=0}^{p+q-2} \frac{1}{k!}(A+B)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p+q-2} \left(\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i} \right) \qquad \text{par la formule du binôme, puisque } A \text{ et } B \text{ commutent}$$

$$= \sum_{k=0}^{p+q-2} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!} \frac{k!}{i!(k-i)!} A^i B^{k-i} \right) = \sum_{k=0}^{p+q-2} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!} A^i B^{k-i} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{p+q-2} \left(\sum_{k=i}^{p+q-2} \frac{1}{i!(k-i)!} A^i B^{k-i} \right) \qquad \text{en échangeant les 2 sommes}$$

$$= \sum_{i=0}^{p+q-2} \left(\frac{1}{i!} A^i \left(\sum_{k=i}^{p+q-2} \frac{1}{(k-i)!} B^{k-i} \right) \right) \qquad \text{car } \frac{1}{i!}A^i \text{ est une constante vis-à-vis de } j$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{1}{i!} A^i \left(\sum_{j=0}^{p+q-2-i} \frac{1}{j!} B^j \right) \right)$$

car $p+q-2 \geq p-1$ et $A^i = 0$ pour $i \geq p$
et en faisant le changement d'indices $j = k-i$ dans la somme interne

$$= \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{1}{i!} A^i \left(\sum_{j=0}^{q-1} \frac{1}{j!} B^j \right) \right) \text{ car } 0 \leq i \leq p-1 \Rightarrow p+q-2-i \geq q-1 \text{ et car } B^j = 0 \text{ si } j \geq q$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} A^i \right) \left(\sum_{j=0}^{q-1} \frac{1}{j!} B^j \right) \qquad \text{car } \left(\sum_{j=0}^{q-1} \frac{1}{j!} B^j \right) \text{ est une constante vis-à-vis de } i$$

$$= E(A) \times E(B)$$

Or on sait que $A+B$ est nilpotente, et que son indice de nilpotence r vérifie $r \leq p+q-1$.
Donc $E(A+B) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!}(A+B)^k = \sum_{k=0}^{p+q-2} \frac{1}{k!}(A+B)^k$, car si $r \leq p+q-2$, les termes $(A+B)^k$ pour k entre r et $p+q-2$ sont nuls.
On en déduit que : $\boxed{E(A+B) = E(A) \times E(B)}$.