Devoir maison 8.

À rendre le lundi 4 mars 2024

Quelques prérequis :

★ Considérons une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices carrées de taille 3 :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Si toutes les suites (a_n), (b_n), etc... ont des limites finies, alors on dit que la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n & \lim\limits_{n\to+\infty} b_n & \lim\limits_{n\to+\infty} c_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} d_n & \lim\limits_{n\to+\infty} e_n & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} g_n & \lim\limits_{n\to+\infty} h_n & \lim\limits_{n\to+\infty} i_n \end{pmatrix}$$

Exemple : si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $M_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \frac{n+1}{n} \\ \mathrm{Arctan}(n) & 0 & \cos(\frac{1}{n}) \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$ existe et vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\pi}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

On admet que si A et B sont deux matrices fixes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et si (u_n) et (v_n) sont deux suites de réels qui convergent vers des réels ℓ et ℓ', alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n.A + v_n.B$ existe et vaut $\ell.A + \ell'.B$.

★ On admet que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la suite de réels $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^t :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

On notera I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $E(M)$ la matrice suivante, si elle existe :

$$E(M) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k.$$

Partie 1 : Exemple des matrices diagonales

1°) Montrer que $E(I)$ existe, et que $E(I) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

2°) On note O la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $E(O)$ existe et que $E(O) = I$.

3°) Montrer de même que si D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors $E(D)$ existe, et déterminer $E(D)$.

Partie 2 : Un autre exemple

Dans cette partie, on suppose que A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 2A + I = 0$.

4°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = nA - (n-1)I$.

5°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire la matrice $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$ comme une combinaison linéaire $u_n A + v_n I$, où u_n et v_n s'expriment à l'aide du symbole $\sum$.

6°) En déduire que $E(A)$ existe et déterminer sa valeur.

Partie 3 : Une matrice nilpotente

On pose $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7°) Calculer les puissances de N.

8°) Soit $t \in \mathbb{R}$. Justifier que $E(tN)$ existe, et que $E(tN) = I + tN + \dfrac{t^2}{2} N^2$.

Dans la suite, on notera, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F(t) = E(tN)$.

F est donc une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

9°) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, $F(t+s) = F(t)F(s)$.

10°) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F(t)$ est une matrice inversible, et déterminer son inverse.

11°) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(F(t))^n = F(nt)$.

12°) Montrer que F est une application injective.

Remarque culturelle : les solutions du système différentiel défini par $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ *sont exactement les fonctions de la forme* $t \mapsto E(tN) \times \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix}$, *avec* $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Partie 4 : Un résultat général sur les matrices nilpotentes

$\boxed{\textbf{Cette partie est facultative}}$.

Ici, on travaille avec des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 1$.
On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente* s'il existe un entier naturel non nul i tel que $M^i = 0$.
On appelle *indice de nilpotence* de la matrice M le plus petit entier i de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $M^i = 0$.
Autrement dit, p est l'indice de nilpotence de M si et seulement si $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$.

Pour toute matrice nilpotente M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la matrice :

$$E(M) = I_n + M + \frac{1}{2!} M^2 + \frac{1}{3!} M^3 + \cdots + \frac{1}{(p-1)!} M^{p-1}$$

où p est l'indice de nilpotence de M.

13°) Soit A et B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'indices de nilpotence respectifs p et q.
On suppose que A et B commutent (c'est-à-dire $AB = BA$).
Montrer que $A+B$ est nilpotente et que son indice de nilpotence est inférieur ou égal à $p+q-1$.

14°) Soit A et B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent.
On notera leurs indices de nilpotence respectivement p et q.
En calculant $\displaystyle\sum_{k=0}^{p+q-2} \frac{1}{k!} (A+B)^k$, montrer que : $E(A+B) = E(A) \times E(B)$.