Corrigé du devoir maison 7.

Exercice 1

1°) *On rappelle que $f^{-1}(\mathbb{R})$ est une partie du domaine de départ de f, i.e de $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$.*
Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$. On a :

$$z \in f^{-1}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$$

Notons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$, calculons :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-iz-2}{z+1} = \frac{-i(x+iy)-2}{x+1+iy} = \frac{-2+y-ix}{x+1+iy} = \frac{(-2+y-ix)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2} \\ &= \frac{(-2+y)(x+1)-xy+i(-x(x+1)-y(-2+y))}{(x+1)^2+y^2} \\ &= \frac{-2x-2+y}{(x+1)^2+y^2} + i\frac{-x^2-x-y^2+2y}{(x+1)^2+y^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$z \in f^{-1}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow -x^2-x-y^2+2y = 0.$$

Comme $\left|z-(-\frac{1}{2}+i)\right|$ est la longueur ΩM, avec M le point d'affixe z, on a aussi :

$$\begin{aligned} z \in \Gamma &\Longleftrightarrow \left|z-(-\frac{1}{2}+i)\right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ &\Longleftrightarrow \left|x+iy-(-\frac{1}{2}+i)\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \left|(x+\frac{1}{2})+i(y-1)\right|^2 = \frac{5}{4} \\ &\Longleftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2+(y-1)^2 = \frac{5}{4} \\ &\Longleftrightarrow x^2+x+\frac{1}{4}+y^2-2y+1 = \frac{5}{4} \\ &\Longleftrightarrow x^2+x+y^2-2y = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $z \in f^{-1}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow z \in \Gamma$.
Avec $z = -1$ i.e. $x = -1$ et $y = 0$, l'équation $x^2+x+y^2-2y = 0$ est vérifiée ; rappelons que f n'est pas définie en -1, donc on conclut que $\boxed{f^{-1}(\mathbb{R}) = \Gamma\backslash\{-1\}}$ (on identifie le complexe -1 avec le point $(-1, 0)$).

2°) On a $f : \mathbb{C}\backslash\{-1\} \to \mathbb{C}$.
Soit $t \in \mathbb{C}$. On résout, avec comme inconnue $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$:

$$\begin{aligned} f(z) = t &\Longleftrightarrow \frac{-iz-2}{z+1} = t \\ &\Longleftrightarrow -iz-2 = t(z+1) \\ &\Longleftrightarrow -2-t = z(t+i) \end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas particulier $t = -i$, l'équation $f(z) = t$ est équivalente à $-2 + i = 0$: c'est impossible, donc $-i$ n'a pas d'antécédent par f.
Reprenons en supposant $t \neq -i$:

$$f(z) = t \Longleftrightarrow z = \frac{-2-t}{t+i}$$

Vérifions que la valeur $\dfrac{-2-t}{t+i}$ obtenue est bien dans $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$:

$$\frac{-2-t}{t+i} = -1 \Longleftrightarrow -2-t = -t-i \Longleftrightarrow -2 = -i \text{ : impossible}$$

Donc chaque $t \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$ possède un unique antécédant $\dfrac{-2-t}{t+i} \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ par f.
Finalement, on peut dire que $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{C}\setminus\{-1\} \text{ sur } \mathbb{C}\setminus\{-i\}}$, et que sa réciproque est

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{C}\setminus\{-i\} & \to & \mathbb{C}\setminus\{-1\} \\ & t & \mapsto & -\dfrac{t+2}{t+i} \end{array}}$$

3°) *On rappelle que $f(\mathbb{U})$ est une partie du domaine d'arrivée de f, i.e de $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$.*
Soit $t \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$.

$$\begin{aligned} t \in f(\mathbb{U}) &\Longleftrightarrow \exists\, z \in \mathbb{U},\ t = f(z) \\ &\Longleftrightarrow \exists\, z \in \mathbb{U},\ z = f^{-1}(t) \\ &\Longleftrightarrow f^{-1}(t) \in \mathbb{U} \\ &\Longleftrightarrow \left|-\frac{t+2}{t+i}\right| = 1 \\ &\Longleftrightarrow |t+2| = |t+i| \\ &\Longleftrightarrow |t+2|^2 = |t+i|^2 \text{ (un module est un réel positif)} \\ &\Longleftrightarrow (t+2)(\overline{t}+2) = (t+i)(\overline{t}-i) \\ &\Longleftrightarrow t\overline{t} + 2\overline{t} + 2t + 4 = t\overline{t} + i\overline{t} - it + 1 \\ &\Longleftrightarrow 2(\overline{t}+t) + 3 = i(\overline{t}-t) \\ &\Longleftrightarrow 4x + 3 = i(-2iy) \text{ en notant } x = \mathrm{Re}(z) \text{ et } y = \mathrm{Im}(z) \\ &\Longleftrightarrow y = 2x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

On peut remarquer que pour $-i$, identifié à son point image $(-1, 0)$, ne vérifie pas cette équation.
Ainsi, $\boxed{f(\mathbb{U}) \text{ est la droite d'équation } y = 2x + \frac{3}{2}}$.
Remarque : l'équation $|t+2| = |t+i|$ traduit le fait qu'il s'agit de la médiatrice du segment $[AB]$, avec A le point d'affixe -2 et B le point d'affixe $-i$.

Exercice 2

1°) Prenons $x = y = 1$ dans $(*)$, on obtient : $f(1) = f(1) + f(1)$, d'où $f(1) = 0$.
Comme f est croissante, on en déduit :
$\boxed{\forall\, x \in\,]0,1],\ f(x) \leq 0, \text{ et } \forall\, x \in [1, +\infty[,\ f(x) \geq 0.}$

2°) Soit $x > 0$. Prenons $y = \dfrac{1}{x}$ dans $(*)$ (c'est bien dans $]0, +\infty[$) :

$$f\left(x\frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ i.e. } f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Et comme $f(1) = 0$, on obtient $\boxed{f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x).}$

3°) f n'est pas la fonction nulle sur $]0, +\infty[$, donc il existe un réel $x_1 > 0$ tel que $f(x_1) \neq 0$.
Si $x_1 > 1$, alors, comme f est positive sur $[1, +\infty[$ d'après la question 1, on a $f(x_1) > 0$. On pose alors $x_0 = x_1$.
Le cas $x_1 = 1$ est impossible car $f(1) = 0$.
Si $x_1 \in]0, 1[$, alors $\dfrac{1}{x_1} > 1$. Comme $f\left(\dfrac{1}{x_1}\right) = -f(x_1)$, on en tire que $f\left(\dfrac{1}{x_1}\right) \neq 0$. De même que dans le cas $x_1 > 1$, on peut affirmer que $f\left(\dfrac{1}{x_1}\right) > 0$. On pose alors $x_0 = \dfrac{1}{x_1}$.
Dans tous les cas, $\boxed{\text{il existe bien réel } x_0 \text{ dans }]1, +\infty[\text{ tel que } f(x_0) > 0.}$

4°) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n : f\left(x_0^{2^n}\right) = 2^n f(x_0)$.

- $f\left(x_0^{2^0}\right) = f(x_0^1) = f(x_0)$, et $2^0 f(x_0) = f(x_0)$, donc P_0 est vraie.
- Supposons P_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.
  Remplaçons, dans $(*)$, x et y par $x_0^{2^n}$: on obtient

$$\begin{aligned}
f\left(x_0^{2^n} x_0^{2^n}\right) &= f\left(x_0^{2^n}\right) + f\left(x_0^{2^n}\right) \\
f\left(\left(x_0^{2^n}\right)^2\right) &= 2f\left(x_0^{2^n}\right) \\
f\left(x_0^{2\times 2^n}\right) &= 2 \times 2^n f(x_0) \text{ par } P_n \\
f\left(x_0^{2^{n+1}}\right) &= 2^{n+1} f(x_0)
\end{aligned}$$

  Ainsi P_{n+1} est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f\left(x_0^{2^n}\right) = 2^n f(x_0).}$

5°) Comme f est une fonction croissante, par le théorème de la limite monotone, elle possède une limite ℓ en $+\infty$, avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On a donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Comme $x_0 > 1$, on a $x_0^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Or $(x_0^{2^n})$ est une suite extraite de (x_0^n) (car $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2^n \end{array}$ est strictement croissante).
Donc $x_0^{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par composition de limites, $f\left(x_0^{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(x_0^{2^n}\right) = 2^n f(x_0)$, et comme $f(x_0)$ est une constante strictement positive, $2^n f(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Par unicité de la limite, on obtient $\ell = +\infty$. Ainsi, $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

6°) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = -f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Or $\dfrac{1}{x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(X) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Donc, par composition de limites, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to0}{\longrightarrow} +\infty$.
Ainsi, $\boxed{f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} -\infty.}$