Devoir maison 6.

À rendre le lundi 8 janvier 2024

Exercice

Partie 1 : Définition géométrique du nombre d'or

Soit deux réels strictement positifs ℓ et L tels que : $\dfrac{L}{2} < \ell < L$.
Soit un rectangle de longueur L et de largeur ℓ. On pose : $\varphi = \dfrac{L}{\ell}$.
On inscrit, sur un côté du rectangle un carré de côté ℓ. Cela laisse apparaître un rectangle.

On suppose que la proportion $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ du nouveau rectangle est la même que dans le rectangle initial.

1°) Montrer que $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.
Un schéma, accompagnant le raisonnement, sera fortement apprécié.

2°) En déduire φ.

φ est appelé *nombre d'or*. Les rectangles qui sont apparus dans l'énoncé sont appelés des *rectangles d'or*.

Partie 2 : Une suite convergente vers φ

φ vérifie $\varphi^2 = \varphi + 1$ ce qui s'écrit encore : $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$.

On peut alors écrire : $\varphi = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\varphi}}$, $\qquad \varphi = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\varphi}}}$, $\qquad \varphi = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\varphi}}}}$, ...

Ce procédé itératif suggère l'écriture « infinie » $\varphi = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dots}}}}$.

Pour formaliser cette écriture, on va poser $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 + \dfrac{1}{x} \end{array}$ et s'aider de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

3°) **a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe, $u_n > 0$ et $u_n \in \mathbb{Q}$.

b) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

4°) Déterminer les variations de f.

5°) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{2n}$.
Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et à l'aide de f, v_{n+1} en fonction de v_n.

6°) En déduire, par récurrence, que la suite (v_n) est croissante et majorée par φ.

7°) Montrer que la suite (v_n) converge vers φ.

8°) En déduire que la suite (u_{2n+1}) converge vers φ.

9°) Conclure et donner un encadrement de φ à l'aide des éléments de la suite (u_n).

Partie 3 : Étude de deux suites d'entiers

On pose :

$$p_0 = q_0 = 1, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} p_{n+1} = p_n + q_n, \\ q_{n+1} = p_n. \end{cases}$$

10°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

11°) Montrer que les suites (p_n) et (q_n) sont croissantes.

12°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_{n+2} \geq 2q_n$.

13°) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha_n = \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \leq \dfrac{1}{2^n}$.

14°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$.

15°) À l'aide des questions précédentes et en particulier de la question 9, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \varphi| \leq |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n}.$$

16°) Expliciter (sous forme de fraction irréductible) une approximation rationnelle de φ à 10^{-2} près.

★ ★

Remarques culturelles :

- L'écriture de φ comme une écriture infinie de fractions étagées s'appelle *développement en fraction continue*. Les fractions continues étaient connues des mathématiciens indiens dès le Vᵉ siècle et ont été étudiées en Europe à partir du XVIIᵉ siècle.
- On peut montrer que (p_n) est la suite de Fibonacci. La suite $\left(\dfrac{p_{n+1}}{p_n}\right)$ converge vers φ. Ainsi, la suite des rapports successifs d'éléments consécutifs de la suite de Fibonacci converge vers le nombre d'or.
- On peut montrer, qu'en un certain sens, la suite (u_n) constitue la meilleure approximation rationnelle de φ.
- On a coutume de dire que φ (qui est un nombre irrationnel) est le plus irrationnel des nombres irrationnels. Pour préciser les choses, on peut définir le degré d'irrationnalité d'un nombre irrationnel α comme la vitesse à laquelle tendent vers 0 les différences entre α et ses meilleures approximations rationnelles. On peut montrer que, pour φ, elles tendent moins vite vers 0 que pour n'importe quel autre nombre irrationnel.