Corrigé du devoir maison 5.

..

1°) $\dfrac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)} = \dfrac{1+i\dfrac{\sin(a)}{\cos(a)}}{1-i\dfrac{\sin(a)}{\cos(a)}} = \dfrac{\cos(a)+i\sin(a)}{\cos(a)-i\sin(a)} = \dfrac{e^{ia}}{e^{-ia}}$

Donc, $\boxed{\dfrac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)} = e^{i2a}}$.

2°) Soit $w \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
w^n = \frac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)} &\iff w^n = e^{i2a}\\
&\iff w^n = \left(e^{i\frac{2a}{n}}\right)^n\\
&\iff \left(\frac{w}{e^{i\frac{2a}{n}}}\right)^n = 1\\
&\iff \frac{w}{e^{i\frac{2a}{n}}} \text{ est une racine } n\text{ième de l'unité}\\
&\iff \exists\, k \in \{0,\dots,n-1\},\ \frac{w}{e^{i\frac{2a}{n}}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}\\
&\iff \exists\, k \in \{0,\dots,n-1\},\ w = e^{i\frac{2k\pi+2a}{n}}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (F) \text{ est } \left\{e^{i\frac{2k\pi+2a}{n}} \;/\; k \in \{0,\dots,n-1\}\right\}}$.

3°) Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2p\pi \,/\, p \in \mathbb{Z}\}$. Remarquons qu'alors $e^{i\theta} \neq -1$ donc la quantité considérée est bien définie.

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\theta}-1}{i(e^{i\theta}+1)} &= \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{ie^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{i2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{d'après les formules d'Euler}\\
&= \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{e^{i\theta}-1}{i(e^{i\theta}+1)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

4°) Soit $z \in \mathbb{C}$. $1 - iz = 0 \iff z = \dfrac{1}{i} \iff z = -i$, donc (E) est définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$.
Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$.

$$\begin{aligned}
z \text{ solution de } (E) &\iff \frac{1+iz}{1-iz} \text{ solution de } (F)\\
&\iff \exists\, k \in \{0,\dots,n-1\},\ \frac{1+iz}{1-iz} = e^{i\frac{2k\pi+2a}{n}} \qquad \text{par 2.}\\
&\iff \exists\, k \in \{0,\dots,n-1\},\ 1+iz = e^{i\frac{2k\pi+2a}{n}}(1-iz)\\
&\iff \exists\, k \in \{0,\dots,n-1\},\ iz\left(1+e^{i\frac{2k\pi+2a}{n}}\right) = e^{i\frac{2k\pi+2a}{n}} - 1
\end{aligned}$$

Résolvons, pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ fixé :

$$\begin{aligned} 1 + e^{i\frac{2k\pi+2a}{n}} = 0 &\iff e^{i\frac{2k\pi+2a}{n}} = e^{i\pi} \\ &\iff \exists\, p \in \mathbb{Z},\ \frac{2k\pi + 2a}{n} = \pi + 2p\pi \\ &\iff \exists\, p \in \mathbb{Z},\ 2k + 2\frac{a}{\pi} = n + 2pn \\ &\iff \exists\, p \in \mathbb{Z},\ 2\frac{a}{\pi} = n + 2pn - 2k \end{aligned}$$

On a $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $2\frac{a}{\pi} \in]0,1[$. Or, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $n + 2pn - 2k$ est un entier, donc il est différent de $2\frac{a}{\pi}$.

On peut donc diviser par $i\left(1 + e^{i\frac{2k\pi+2a}{n}}\right)$ puis appliquer le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\iff \exists\, k \in \{0, \ldots, n-1\},\ z = \frac{e^{i\frac{2k\pi+2a}{n}} - 1}{i\left(1 + e^{i\frac{2k\pi+2a}{n}}\right)} \\ &\iff \exists\, k \in \{0, \ldots, n-1\},\ z = \tan\left(\frac{k\pi + a}{n}\right) \end{aligned}$$

Les valeurs obtenues sont réelles, et en particulier distinctes de $-i$. Donc ce sont toutes les solutions de (E).

Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{\tan\left(\frac{k\pi + a}{n}\right)\ /\ k \in \{0, \ldots, n-1\}\right\}}$$

Question facultative :

Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$. Supposons z solution de (E). Alors :

$$\begin{aligned} \left|\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n\right| &= \left|\frac{1 + i\tan(a)}{1 - i\tan(a)}\right| \\ \left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^n &= |e^{i2a}| = 1 \end{aligned}$$

Or un module est un réel positif, donc nécessairement :

$$\begin{aligned} \left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| &= 1 \\ \frac{|1+iz|}{|1-iz|} &= 1 \\ |1+iz| &= |1-iz| \\ |1+iz|^2 &= |1-iz|^2 \\ (1+iz)(\overline{1+iz}) &= (1-iz)(\overline{1-iz}) \\ (1+iz)(1-i\overline{z}) &= (1-iz)(1+i\overline{z}) \\ 1 + iz - i\overline{z} + z\overline{z} &= 1 - iz + i\overline{z} + z\overline{z} \\ 2iz &= 2i\overline{z} \\ z &= \overline{z} \end{aligned}$$

Donc z est un réel. Ainsi $\boxed{\text{les solutions de } (E) \text{ sont nécessairement réelles}}$.