Devoir maison 5.

À rendre le jeudi 16 novembre 2023

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On souhaite résoudre l'équation :

$$(E) \ : \ \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)}.$$

1°) Déterminer la forme trigonométrique de $\dfrac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)}$.

2°) Résoudre l'équation (F) d'inconnue $w \in \mathbb{C}$: $w^n = \dfrac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)}$.

3°) Simplifier, pour tout $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2p\pi \,/\, p \in \mathbb{Z}\}$, $\dfrac{e^{i\theta}-1}{i(e^{i\theta}+1)}$.

4°) Résoudre (E).

Question facultative :
Ainsi, on constate que toutes les solutions de (E) sont réelles.
Montrer qu'on pouvait l'affirmer sans résoudre (E), en exploitant l'égalité des modules des deux membres de l'équation.