Corrigé du devoir maison 3.

Exercice

1°) a) f est une fonction polynomiale, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$ donc, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.}$

b) On sait que, pour $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

Par quotient, on retrouve la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, et pour tout x dans cet ensemble,

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Donc, $\boxed{f'(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}}$

c) On a $A_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k = 2\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = 2f'(2)$ d'après la question a).

Donc, en utilisant la question b) :

$$\begin{aligned} A_n &= 2\frac{n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1}{(1-2)^2} \\ &= 2\left(n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1\right) \\ &= 2n2^{n+1} - (n+1)2^{n+1} + 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{A_n = (n-1)2^{n+1} + 2}$$

2°) a) $\boxed{S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} 2^j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j-1} 2^j\right)}$

b) Utilisons la première expression :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n} 2^j - \sum_{j=0}^{i} 2^j \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - \frac{1-2^{i+1}}{1-2} \right) \qquad \text{car } 2 \neq 1 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(2^{n+1} - 2^{i+1} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1} \\
&= n2^{n+1} - 2\sum_{i=0}^{n-1} 2^i \\
&= n2^{n+1} - 2\frac{1-2^n}{1-2} \\
&= n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 \\
&= (n-1)2^{n+1} + 2
\end{aligned}$$

Utilisons la deuxième expression : $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j-1} 2^j \right)$.

Comme 2^j est une constante vis-à-vis de i, $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j2^j = A_n$.

D'où $\boxed{S_n = A_n = (n-1)2^{n+1} + 2}$.