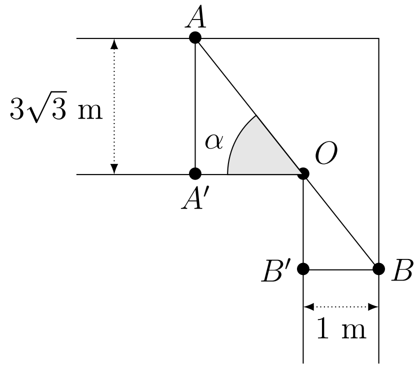
Corrigé du devoir maison 2.

Exercice 1 (Trigonométrie appliquée)

1°) On a $AB = AO + OB$.
Notons A' le point situé en face de A dans le couloir et B' le point situé en face de B dans le couloir :



Le triangle AOA' est rectangle en A', et l'angle $\widehat{AOA'}$ vaut α, donc $\sin(\alpha) = \dfrac{AA'}{AO}$ d'où $AO = \dfrac{AA'}{\sin(\alpha)} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sin(\alpha)}$.
Le triangle BOB' est rectangle en B', et $\widehat{BOB'} = \widehat{BOA} - \widehat{AOA'} - \widehat{A'OB'} = \pi - \alpha - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{BB'}{OB}$ d'où $OB = \dfrac{BB'}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$.

Ainsi, $\boxed{AB = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sin(\alpha)} + \dfrac{1}{\cos(\alpha)}}$.

2°) Par quotient et somme, f est dérivable sur I, et pour tout $\alpha \in I$,

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{-3\sqrt{3}\sin'(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} + \frac{-\cos'(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} + \frac{\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \end{aligned}$$
$$\boxed{f'(\alpha) = \frac{\sin^3(\alpha) - 3\sqrt{3}\cos^3(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)}}$$

3°) Pour tous réels a et b, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
On en tire que pour tout $\alpha \in I$,

$$f'(\alpha) = \frac{\sin^3(\alpha) - \left(\sqrt{3}\cos(\alpha)\right)^3}{\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)} = \frac{\left(\sin(\alpha) - \sqrt{3}\cos(\alpha)\right)\left(\sin^2(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha)\cos(\alpha) + 3\cos^2(\alpha)\right)}{\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)}.$$

Or, pour tout $\alpha \in I$, $\sin(\alpha) > 0$, $\cos(\alpha) > 0$, donc $\sin^2(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha)\cos(\alpha) + 3\cos^2(\alpha) > 0$ et $\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha) > 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } \alpha \in I,\ f'(\alpha) \text{ est du signe de } \sin(\alpha) - \sqrt{3}\cos(\alpha).}$.

4°) Soit $\alpha \in I$.

$$\begin{aligned}
f'(\alpha) > 0 &\iff \sin(\alpha) - \sqrt{3}\cos(\alpha) > 0 \\
&\iff \sin(\alpha) > \sqrt{3}\cos(\alpha) \\
&\iff \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} > \sqrt{3} \qquad \text{car } \cos(\alpha) > 0 \\
&\iff \tan(\alpha) > \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\iff \alpha > \frac{\pi}{3} \qquad \text{car tan est strictement croissante sur } I
\end{aligned}$$

De même, $f'(\alpha) = 0 \iff \alpha = \dfrac{\pi}{3}$, d'où :

α	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	∞

Justifications des limites et valeurs :

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}} = 6 + 2 = 8.$

$\cos(\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\sin(\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$, en restant positif lorsque $\alpha \in I$, donc $f(\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} +\infty$.

$\cos(\alpha) \underset{\alpha\to \frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$, en restant positif lorsque $\alpha \in I$, et $\sin(\alpha) \underset{\alpha\to \frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 1$ donc $f(\alpha) \underset{\alpha\to \frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} +\infty$.

5°) AB représente la largeur disponible lorsqu'on fait passer le tableau dans le tournant du couloir. On constate qu'il y a un angle pour lequel cette largeur disponible est minimale, égale à 8 mètres d'après la question précédente.

Donc $\boxed{\text{la largeur maximale du tableau que l'on peut déplacer dans le couloir est de 8 mètres.}}$

Exercice 2

Notons (E) : $1+\sin(4x)-\cos(4x)=\sqrt{2}\sin(2x)$, équation définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(E) &\Longleftrightarrow 1+2\sin(2x)\cos(2x)-\big(1-2\sin^2(2x)\big)=\sqrt{2}\sin(2x)\\
&\Longleftrightarrow 2\sin(2x)\cos(2x)+2\sin^2(2x)-\sqrt{2}\sin(2x)=0\\
&\Longleftrightarrow 2\sin(2x)\left(\cos(2x)+\sin(2x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0\\
&\Longleftrightarrow \sin(2x)=0 \text{ ou } \cos(2x)+\sin(2x)-\frac{1}{\sqrt{2}}=0\\
&\Longleftrightarrow 2x=0[\pi] \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(2x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2x)=\frac{1}{2}\\
&\Longleftrightarrow x=0\left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&\Longleftrightarrow x=0\left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } 2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}[2\pi]\\
&\Longleftrightarrow x=0\left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } 2x=\frac{7\pi}{12}[2\pi] \text{ ou } 2x=-\frac{\pi}{12}[2\pi]\\
&\Longleftrightarrow x=0\left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x=\frac{7\pi}{24}[\pi] \text{ ou } x=-\frac{\pi}{24}[\pi]
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est $\boxed{\left\{k\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{24}+k\pi,-\frac{\pi}{24}+k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

Exercice 3

- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, c'est terminé : en prenant $\alpha=\sqrt{2}$ et $\beta=\sqrt{2}$, α et β sont irrationnels et α^β est rationnel.
- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel : alors on pose $\alpha=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, et on prend $\beta=\sqrt{2}$, c'est aussi un irrationnel. Calculons :

$$\alpha^\beta=\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\sqrt{2}^2=2\in\mathbb{Q}$$

  Donc, dans ce deuxième cas, on a aussi trouvé α et β convenables.

Conclusion : $\boxed{\text{il existe bien un couple } (\alpha,\beta) \text{ de nombres irrationnels tels que } \alpha^\beta \text{ soit rationnel.}}$