Devoir maison 1.

Exercice

1°) a) Pour tout $x > 0$, $f(x) = x\ln(x+2) - x\ln x$.
$\lim_{x\to 0} \ln(x+2) = \ln(2)$ donc $\lim_{x\to 0} x\ln(x+2) = 0$; et $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ (croissances comparées).
Donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)}$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$

b) Soit $x > 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \ln(x+2) - \ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$ et la courbe de f admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

c) Pour tout $h \in]-1, +\infty[\setminus\{0\}$,

$$\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h}$$

On reconnaît un taux d'accroissement de la fonction ln ; comme cette fonction est dérivable en 1 :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

Par ailleurs, pour $x > 0$,

$$f(x) = x\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 2\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$, par composition avec la limite précédemment établie, on obtient que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2}$.

2°) a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables et, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + x \times \frac{x - (x+2)}{x^2} \times \frac{x}{x+2} \\ &= \boxed{\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}} \end{aligned}$$

f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient, composée et somme de fonctions dérivables.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est deux fois dérivable sur }]0, +\infty[}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x - (x+2)}{x^2} \times \frac{x}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} \\ &= -\frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)^2} = 2\frac{-x-2+x}{x(x+2)^2} = \boxed{-\frac{4}{x(x+2)^2}} \end{aligned}$$

b) Soit $x>0, f''(x)<0$. Ainsi, f' est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

Soit $x>0, f'(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)-\dfrac{2}{x+2}=\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)-\dfrac{2}{x+2}$.

Donc, par opérations, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0}$.

Par stricte décroissance de f', on en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } x>0, f'(x)>0}$.

c) Tableau de variations de f :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f''(x)$	$\Vert$ $\qquad$ $-$
f'	$\searrow$ 0
Signe de $f'(x)$	$\Vert$ $\qquad$ $+$
f	0 $\nearrow$ 2

3°) a) u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x\geq 0$:

$$u'(x)=2\frac{x+2-x}{(x+2)^2}=\frac{4}{(x+2)^2}$$

Ainsi,

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$u'(x)$	$+$
u	0 $\nearrow$ 2

Pour $x>0, u(x)=\dfrac{2x}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}=\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{x}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}2.$

b) Soit $x>0$.

$$\begin{aligned} f(x)-u(x)&=x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)-\frac{2x}{x+2}\\ \text{et } xf'(x)&=x\left(\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)-\frac{2}{x+2}\right)\\ &=x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)-\frac{2x}{x+2}\end{aligned}$$

D'où $\boxed{f(x)-u(x)=xf'(x).}$

Comme $xf'(x)>0$ pour tout $x>0$, on en déduit que $f(x)>u(x)$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{H}\text{ est en-dessous de }\mathcal{C}}$.

Voir le tracé de la courbe à la fin de la première partie.

c) Soit $\lambda > 0$. La tangente à $\mathcal{C}$ au point M_λ a pour équation :

$$\boxed{y = f'(\lambda)(x - \lambda) + f(\lambda)}$$

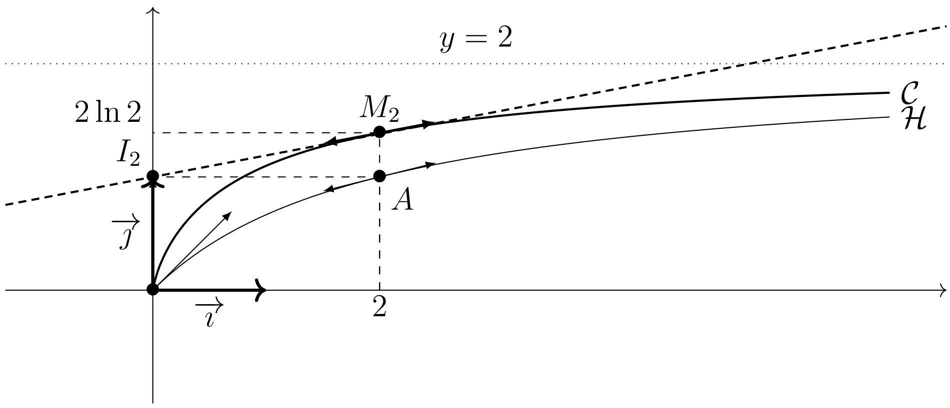
Pour connaître le point d'intersection avec l'axe des ordonnées, il suffit de faire $x = 0$ dans l'équation.
L'ordonnée du point d'intersection est :

$$-\lambda f'(\lambda) + f(\lambda) = \boxed{u(\lambda)}$$

car, pour tout $x > 0$, $f(x) - u(x) = xf'(x)$. Donc le point d'intersection est bien le point I_λ de coordonnées $(0, u(\lambda))$.

Ce point I_λ s'obtient facilement à partir de $\mathcal{H}$: c'est le point de l'axe des ordonnées qui a même ordonnée que le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse λ.
Pour tracer la tangente à $\mathcal{C}$ au point M_λ, il suffit donc de relier le point M_λ et le point I_λ.

d) Explications pour le tracé de $\mathcal{H}$:
Le point d'abscisse 0 a pour ordonnée $u(0) = 0$, et la pente de la tangente en ce point vaut $u'(0) = 1$.
Le point A a pour coordonnées $(2, 1)$ car $u(2) = 1$.
La tangente en A à la courbe $\mathcal{H}$ a pour pente $u'(2) = \dfrac{1}{4}$.
La tangente en M_2 à la courbe $\mathcal{C}$ est la droite qui passe par le point $I_2(0, 1)$ et $M_2(2, 2\ln 2)$.
$u(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{H}$.



4°) a)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x}{x+2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{x+2-2}{x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\
&= [x - 2\ln(x+2)]_1^2 \\
&= 2 - 2\ln(4) - (1 - 2\ln(3))
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^2 \frac{x}{x+2}\,\mathrm{d}x = 1 - 4\ln(2) + 2\ln(3)} \qquad \text{car } \ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2)$$

b) Les fonctions $u : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $v : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$ sont dérivables sur $[1, 2]$ et pour tout

$x \in [1,2]$:

$$u(x) = \frac{x^2}{2} \qquad u'(x) = x$$
$$v(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \qquad v'(x) = \frac{x-(x+2)}{x^2} \times \frac{x}{x+2} = \frac{-2}{x^2}\frac{x}{x+2}$$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{-2}{x^2}\frac{x}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2^2}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3) + \int_1^2 \frac{x}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3) + 1 + 2\ln(3) - 4\ln(2) \quad \text{d'après la question précédente}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{3}{2}\ln(3) - 2\ln(2)}$$