# Devoir maison 1.

*À rendre le jeudi 14 septembre 2023*

**CONSIGNES POUR LES DM**

- ★ Ne pas commencer le DM la veille du jour où vous devez le rendre. Anticipez !

  Travailler sérieusement les DM est indispensable pour progresser. Il faut vous mettre au travail sur le DM dès que je vous le donne. Le but n'est pas de le faire d'un seul coup mais d'étaler le travail pour avoir un temps de réflexion suffisant.
- ★ Il faut s'entraîner à chercher seul. C'est normal de ne pas trouver du premier coup et c'est en "séchant" sur les problèmes qu'on arrive, petit à petit, à progresser (d'où encore l'intérêt de s'y prendre suffisamment à l'avance).

  Si vous n'arrivez pas à vous débloquer, vous pouvez me poser des questions et vous pouvez aussi en discuter avec vos camarades. La phase de rédaction doit en revanche être complètement personnelle. Cela n'a aucun intérêt de recopier le DM du voisin.
- ★ La copie que vous rendez doit être écrite lisiblement, avec soin, sans ratures. Les résultats doivent être encadrés. Si ceci n'est pas respecté, je ne corrigerai pas votre copie.

  Utilisez des copies doubles que ce soit en DM ou en DS et évitez les encres pâles.
- ★ Aucun retard dans le rendu des DM ne sera accepté.

# Exercice

On effectuera toutes les représentations graphiques sur la même figure dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
On considère la fonction $f$ définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ f(0)=0. \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

**1°)** **a)** Montrer que $f$ est continue en 0.

**b)** $f$ est-elle dérivable en 0 ?

**c)** Démontrer que : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.
En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**2°)** **a)** Justifier que $f$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer l'expression de $f''(x)$ pour tout $x>0$.

**b)** Étudier le sens de variations de $f'$ et calculer la limite de $f'(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
En déduire le signe de $f'$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**c)** Dresser le tableau de variations de $f$.

**3°)** Soit $u$ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$u(x) = \frac{2x}{x+2}.$$

On note $\mathcal{H}$ sa courbe représentative.

**a)** Dresser le tableau de variations de $u$.

**b)** Vérifier que, pour $x>0$, on a : $f(x) - u(x) = xf'(x)$.
En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$.
Tracer sur une feuille à part la courbe $\mathcal{H}$, en indiquant le point $A$ d'abscisse 2.

**c)** Soit $\lambda$ un réel strictement positif. On note $M_\lambda$ le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\lambda$.
Rappeler une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point $M_\lambda$, et vérifier que cette tangente rencontre l'axe des ordonnées au point $I_\lambda$ d'ordonnée $u(\lambda)$.
En déduire une méthode pour tracer la tangente à $\mathcal{C}$ en $M_\lambda$, connaissant la courbe $\mathcal{H}$.

**d)** Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de $f$, sur la même feuille qu'à la question b). On précisera la tangente au point d'abscisse 0 et au point $M_2$ (en utilisant la question précédente).

**4°)** **a)** Vérifier que :

$$\int_1^2 \frac{x}{x+2}\,\mathrm{d}x = 1 + 2\ln(3) - 4\ln(2).$$

**b)** En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur de $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.