Corrigé du devoir maison 11.

Question préliminaire

Comme T est scindé et de degré p, il possède p racines comptées avec multiplicités ; on les note $x_1, \dots, x_p$, $\boxed{\boxed{\text{en les écrivant autant de fois que leur multiplicité}}}$. On a :

$$\boxed{x_1 + \cdots + x_p = -\frac{a_{p-1}}{a_p}.}$$

1°) a) $Q_1 = X + (X-1)Q_0 = \boxed{2X-1}$.

$Q_2 = X^2 + (X-1)Q_1 = X^2 + (X-1)(2X-1) = \boxed{3X^2 - 3X + 1}$.

$Q_3 = X^3 + (X-1)Q_2 = X^3 + (X-1)(3X^2 - 3X + 1)$

$Q_3 = X^3 + 3X^3 - 3X^2 + X - 3X^2 + 3X - 1 = \boxed{4X^3 - 6X^2 + 4X - 1}$.

On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{Q_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } n+1}$.

b) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$H_n : \exists R_n \in \mathbb{R}[X],\ Q_n = (n+1)X^n + R_n$ et $\deg(R_n) < n$.

- $Q_0 = 1$, c'est bien $(0+1)X^0 + R_0$ avec $R_0 = 0$ qui est bien un polynôme de degré $-\infty < 0$.
  Ainsi H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons H_n vraie : on a $Q_n = (n+1)X^n + R_n$ avec R_n un polynôme de degré $< n$.

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= X^{n+1} + (X-1)\left((n+1)X^n + R_n\right) \\ &= X^{n+1} + (n+1)X^{n+1} - (n+1)X^n + (X-1)R_n \\ &= (n+2)X^{n+1} - (n+1)X^n + (X-1)R_n \end{aligned}$$

  Posons $R_{n+1} = -(n+1)X^n + (X-1)R_n$.
  Comme $\deg(R_n) < n$, on a $\deg\left((X-1)R_n\right) = 1 + \deg(R_n) < n+1$, et par somme $\deg(R_{n+1}) \le \max\left(\deg(-(n+1)X^n), \deg((X-1)R_n)\right) < n+1$.
  Ainsi H_{n+1} est vraie.
- On a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, H_n$ est vraie. Ce qui signifie :
  $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ Q_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } n+1}$

2°) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n : Q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (X-1)^k X^{n-k}$.

- $Q_0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} (X-1)^k X^{0-k} = (X-1)^0 X^0 = 1$.
  Ainsi H_0 est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons H_n vraie :

$$\begin{aligned}
Q_{n+1} &= X^{n+1} + (X-1)\sum_{k=0}^{n}(X-1)^k X^{n-k} \\
&= X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(X-1)^{k+1} X^{n+1-(k+1)} \\
&= (X-1)^0 X^{n+1-0} + \sum_{j=1}^{n+1}(X-1)^j X^{n+1-j} \text{ (changement d'indice } j = k+1) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1}(X-1)^j X^{n+1-j}
\end{aligned}$$

Ainsi H_{n+1} est vraie.

- On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ Q_n = \sum_{k=0}^{n}(X-1)^k X^{n-k}}$

3°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la formule du binôme,

$$\begin{aligned}
Q_n &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}X^j\right)X^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}X^{n+j-k}\right)
\end{aligned}$$

Étudions la somme interne $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}X^{n+j-k}$:

- Pour $k=0$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{0}\binom{0}{j}(-1)^{0-j}X^{n+j-0} = \binom{0}{0}(-1)^{0-0}X^n$: il n'y a pas de terme en X^{n-1}.
- Pour $k \geq 1$, dans $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}X^{n+j-k}$, X^{n-1} apparaît quand $j-k=-1$ i.e. $j=k-1$.

  Le coefficient est alors $\displaystyle\binom{k}{k-1}(-1)^{k-(k-1)} = k(-1)^1 = -k$.

Ainsi, $\displaystyle b_n = \sum_{k=1}^{n}(-k) = -\sum_{k=1}^{n}k$ donc $\boxed{b_n = -\frac{n(n+1)}{2}}$.

Autre méthode :

On remarque que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
X^{n+1}-(X-1)^{n+1} &= (X-(X-1))(X^n + X^{n-1}(X-1) + \cdots + X(X-1)^{n-1} + (X-1)^n) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(X-1)^k X^{n-k} \\
&= Q_n
\end{aligned}$$

$$Q_n = X^{n+1}-(X-1)^{n+1} = X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}X^k(-1)^{n+1-k}$$

Donc le coefficient de X^{n-1} est obtenu uniquement dans le $\sum$ pour $k=n-1$.

Ainsi, $\displaystyle b_n = -(-1)^{n+1-(n-1)}\binom{n+1}{n-1} = -(-1)^2\binom{n+1}{2} = -\frac{n(n+1)}{2}$.

4°) — *Méthode 1* :

Soit $x \in \mathbb{C}$.

- Si $x = 1$, x n'est pas racine de P car $1^{n-1} + \cdots + 1 = n \neq 0$.
- Supposons maintenant $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Longleftrightarrow x^{n-1} + \cdots + x + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{1 - x^n}{1 - x} = 0 \qquad \text{car } x \neq 1 \\ &\Longleftrightarrow x^n = 1 \\ &\Longleftrightarrow \exists\, k \in \{0, \ldots, n-1\}\ x = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\ &\Longleftrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n-1\}\ x = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \end{aligned}$$

car on a supposé $x \neq 1$, et pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1$ ssi $k = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{les racines de } P \text{ sont les } \omega_k \text{ pour } k \in \{1, \ldots, n-1\}.}$

— *Méthode 2* :

Comme l'énoncé donne la réponse, on peut vérifier que les ω_k sont racines et conclure par un argument sur le degré.

Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $P(\omega_k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \omega_k^j = 1 + \omega_k + \cdots + \omega_k^{n-1} = \frac{1 - \omega_k^n}{1 - \omega_k}$ car $\omega_k \neq 1$.

Or $\omega_k^n = 1$ donc $P(\omega_k) = 0$.

⚠ *La question n'est pas du tout finie ! Pourquoi n'y aurait-il pas d'autres racines ?*

D'après nos connaissances sur les racines $n$ièmes de l'unité, les ω_k pour $1 \leq k \leq n-1$ sont $n-1$ valeurs deux à deux distinctes, donc on a obtenu $n-1$ racines $\boxed{\boxed{\text{distinctes}}}$ pour P.

De plus, $\boxed{\boxed{\deg(P) = n-1}}$ donc il n'y en a pas d'autres, ce sont toutes les racines de P (et par ailleurs, elles sont simples).

— *Méthode 3* : On connaît la factorisation classique : $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$.

Cela peut s'écrire : $X^n - 1 = (X - 1) \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k)$.

De plus, $X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + \cdots + X + 1) = (X-1)P$.

Donc $(X - 1) \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k) = (X-1)P$.

Comme $X - 1$ n'est pas le polynôme nul, on en déduit que : $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k)$. D'où le résultat.

5°) Soit $x \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. On a $y = \dfrac{1}{1-x} \neq 0$ donc $1 - x = \dfrac{1}{y}$ donc $\boxed{x = 1 - \dfrac{1}{y}}$.

$$\begin{aligned}
P(x) = 0 &\iff P\left(1 - \frac{1}{y}\right) = 0 \\
&\iff \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^k = 0 \\
&\iff \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{y-1}{y}\right)^k = 0 \\
&\iff y^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{y-1}{y}\right)^k = 0 \quad \text{car } y^{n-1} \neq 0 \\
&\iff \sum_{k=0}^{n-1} (y-1)^k y^{n-1-k} = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(x) = 0 \iff Q_{n-1}(y) = 0}$$

6°) D'après la question précédente, pour $x \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, x est racine de P si et seulement si $\dfrac{1}{1-x}$ est racine de Q_{n-1}. Comme, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, ω_k est une racine de P différente de 1 *(ne pas oublier de le dire !)*, on obtient que pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\dfrac{1}{1-\omega_k}$ est racine de Q_{n-1}.

⚠ *La question est loin d'être finie ! Nous avons trouvé des racines pour Q_{n-1}, mais pourquoi ce serait les seules ? Il y a deux arguments à donner : le degré de Q_{n-1} mais aussi le fait que les valeurs obtenues sont deux à deux distinctes.*

- Or, pour tout $(x, x') \in (\mathbb{C}\backslash\{1\})^2$:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x'} \implies 1 - x = 1 - x' \implies x = x'$$

  Donc, comme les ω_k pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$ forment $n-1$ valeurs distinctes de $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, on a trouvé $n-1$ racines $\boxed{\boxed{\text{distinctes}}}$ pour Q_{n-1}.
- Or d'après la question 1.b, Q_{n-1} est de $\boxed{\boxed{\text{degré}}}$ $n-1$. Donc Q_{n-1} n'a pas d'autre racine (et ce sont des racines simples).

$\boxed{\text{Ainsi, les racines de } Q_{n-1} \text{ sont les nombres } \dfrac{1}{1-\omega_k} \text{ pour } k \in \{1, \dots, n-1\}}$.

7°) D'après la question 1.b et la question 3, le coefficient dominant (devant X^{n-1}) de Q_{n-1} est n et le coefficient devant X^{n-2} est $-\dfrac{(n-1)n}{2}$.
Q_{n-1} est un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ donc il est scindé. De plus, ses racines sont les $\dfrac{1}{1-\omega_k}$ pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et elles sont toutes de multiplicité 1.
Ainsi, d'après la question préliminaire :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega_k} = -\frac{-\dfrac{n(n-1)}{2}}{n} \quad \text{i.e.} \quad \boxed{S = \frac{n-1}{2}}$$