Corrigé du devoir maison 10.

1°) f est bien une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, montrons qu'elle est linéaire.
Pour tout $((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda.(x,y)+(x',y')) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= (2(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y'), \lambda x + x' + 2(\lambda y + y')) \\ &= (\lambda(2x+3y) + 2x' + 3y', \lambda(x+2y) + x' + 2y') \\ &= \lambda(2x+3y, x+2y) + (2x' + 3y'x' + 2y') \\ &= \lambda f(x,y) + f(x',y') \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.

2°) a) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} &(f^2 - 4f + \mathrm{id})(x,y) \\ &= f^2(x,y) - 4f(x,y) + \mathrm{id}(x,y) \\ &= f(f(x,y)) - 4(2x+3y, x+2y) + (x,y) \\ &= f(2x+3y, x+2y) + (-7x-12y, -4x-7y) \\ &= (2(2x+3y) + 3(x+2y), (2x+3y) + 2(x+2y)) + (-7x-12y, -4x-7y) \\ &= (7x+12y, 4x+7y) + (-7x-12y, -4x-7y) \\ &= (0,0) \end{aligned}$$

Ceci pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ donc $\boxed{f^2 - 4f + \mathrm{id} = 0}$.

b) On peut donc écrire $-f \circ f + 4f = \mathrm{id}$, soit :

$$-f \circ f + 4\mathrm{id} \circ f = \mathrm{id} \quad \text{i.e.} \quad (-f + 4\mathrm{id}) \circ f = \mathrm{id}$$

Cela s'écrit aussi :

$$f \circ (-f) + f \circ 4\mathrm{id} = \mathrm{id} \quad \text{i.e.} \quad f \circ (-f + 4\mathrm{id}) = \mathrm{id}$$

On peut donc conclure que f est bijective de réciproque $f^{-1} = -f + 4\mathrm{id}$. Comme f est linéaire, on conclut que f est un $\boxed{\text{automorphisme de } \mathbb{R}^2}$.
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f^{-1}(x,y) = -f(x,y) + 4(x,y)$ donc $\boxed{f^{-1}(x,y) = (2x - 3y, -x + 2y)}$.

3°) a) Le discriminant de ce trinôme du second degré est $\Delta = 16 - 4 = 12 = (2\sqrt{3})^2$, donc les racines sont $\dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{2}$. Donc,

$$\boxed{\lambda_1 = 2 - \sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}}$$

b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \operatorname{Ker}(f-\lambda_1 \mathrm{id}) &\Longleftrightarrow (f-\lambda_1\mathrm{id})(x,y) = (0,0)\\
&\Longleftrightarrow f(x,y) - (2-\sqrt{3})(x,y) = (0,0)\\
&\Longleftrightarrow (2x+3y, x+2y) - (2x-\sqrt{3}x, 2y-\sqrt{3}y) = (0,0)\\
&\Longleftrightarrow (\sqrt{3}x+3y, x+\sqrt{3}y) = (0,0)\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3y+\sqrt{3}x = 0\\ x+\sqrt{3}y = 0\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow x+\sqrt{3}y = 0 \quad \text{ car } L_1 = \sqrt{3}L_2\\
&\Longleftrightarrow x = -\sqrt{3}y
\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1\mathrm{id}) = \{(-\sqrt{3}y, y) \ / \ y \in \mathbb{R}\} = \{y.(-\sqrt{3}, 1) \ / \ y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((-\sqrt{3}, 1))$.
C'est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $(-\sqrt{3}, 1)$, donc aussi l'ensemble des vecteurs colinéaires à $-(-\sqrt{3}, 1) = (\sqrt{3}, -1)$.

Donc, $\boxed{\operatorname{Ker}(f-\lambda_1\,\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}((\sqrt{3}, -1))}$.
C'est bien $\boxed{\text{une droite vectorielle, de famille génératrice } (u_1) \text{ avec } u_1 = (\sqrt{3}, -1).}$

c) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: H_n : $f^n(u_1) = \lambda_1^n.u_1$ et $f^n(u_2) = \lambda_2^n.u_2$.

- Pour $n = 0$, $f^0(u_1) = \mathrm{id}(u_1) = u_1$ et $\lambda_1^0.u_1 = 1.u_1 = u_1$, donc on a bien $f^0(u_1) = \lambda_1^0.u_1$. De même, $f^0(u_2) = \lambda_2^0.u_2$. Ainsi H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons H_n vraie.

$$\begin{aligned}
f^{n+1}(u_1) &= f\left(f^n(u_1)\right)\\
&= f(\lambda_1^n.u_1) \quad \text{ par hypothèse de récurrence}\\
&= \lambda_1^n.f(u_1) \quad \text{ car } f \text{ est linéaire}\\
&= \lambda_1^n\lambda_1.u_1 \quad \text{ car } u_1 \in \operatorname{Ker}(f-\lambda_1\mathrm{id})\\
&= \lambda_1^{n+1}.u_1
\end{aligned}$$

  De même, $f^{n+1}(u_2) = f(\lambda_2^n.u_2) = \lambda_2^n.f(u_2) = \lambda_2^n\lambda_2.u_2 = \lambda_2^{n+1}.u_2$.
  Donc H_{n+1} est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f^n(u_1) = \lambda_1^n.u_1 \text{ et } f^n(u_2) = \lambda_2^n.u_2.}$

4°) a) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: H_n : $a_n \in \mathbb{N},\ b_n \in \mathbb{N}$.

- H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons H_n vraie.
  $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$. Par hypothèse de récurrence, a_n et b_n sont des entiers naturels donc a_{n+1} et b_{n+1} aussi comme somme et produit d'entiers naturels.
  Donc H_{n+1} est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n \text{ et } b_n \text{ sont des entiers.}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, (a_{n+1}, b_{n+1}) = (2a_n + 3b_n, a_n + 2b_n)$ donc $(a_{n+1}, b_{n+1}) = f(a_n, b_n)$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n : (a_n, b_n) = f^n(a_0, b_0)$.

- $f^0(a_0, b_0) = \mathrm{id}(a_0, b_0) = (a_0, b_0)$ donc H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie.
  $(a_{n+1}, b_{n+1}) = f(a_n, b_n) = f(f^n(a_0, b_0))$ par H_n.
  Donc $(a_{n+1}, b_{n+1}) = f \circ f^n(a_0, b_0) = f^{n+1}(a_0, b_0)$.
  Donc H_{n+1} est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, (a_n, b_n) = f^n(a_0, b_0).}$

c) On a $u_1 + u_2 = (\sqrt{3}, -1) + (\sqrt{3}, 1) = (2\sqrt{3}, 0)$, donc $\boxed{(1,0) = \frac{1}{2\sqrt{3}} u_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} u_2.}$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(a_n, b_n) &= f^n(a_0, b_0) \\
&= f^n(1,0) \\
&= f^n\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} u_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} u_2\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} f^n(u_1) + \frac{1}{2\sqrt{3}} f^n(u_2) \quad \text{ car } f^n \text{ est linéaire} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \lambda_1^n u_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \lambda_2^n u_2 \quad \text{ d'après 3c} \\
&= \frac{(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} (\sqrt{3}, -1) + \frac{(2+\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} (\sqrt{3}, 1) \\
&= \left(\frac{(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n}{2}, \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right) \text{ et } b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right).}$$