Devoir maison 10.

À rendre le Lundi 10 mars 2025

Exercice

On considère l'application f définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (2x+3y, x+2y)$$

L'application identité de $\mathbb{R}^2$ sera notée id.

1°) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2°) Bijectivité de f et calcul de f^{-1}

- **a)** Vérifier que $f^2 - 4f + \mathrm{id} = 0$.
- **b)** En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et donner une expression de $f^{-1}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3°) Calcul de f^n pour 2 vecteurs particuliers

- **a)** Déterminer les racines réelles λ_1 et λ_2 de $x^2 - 4x + 1 = 0$; on prendra $\lambda_1 < \lambda_2$.
- **b)** Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id})$. Justifier qu'il s'agit d'une droite vectorielle, en donner une famille génératrice (u_1) avec u_1 de la forme $u_1 = (x, -1)$ (avec x à déterminer).
  On admet qu'on trouverait de façon similaire que $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id})$ est une droite vectorielle de famille génératrice (u_2) avec $u_2 = (\sqrt{3}, 1)$.
- **c)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(u_1) = \lambda_1^n . u_1$ et $f^n(u_2) = \lambda_2^n . u_2$.

4°) Une application

On note (a_n) et (b_n) les suites définies par : $a_0 = 1, b_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$$

- **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont des entiers.
- **b)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer le couple (a_n, b_n) en fonction de f, n, a_0 et b_0.
- **c)** Montrer que le vecteur $(1,0)$ est combinaison linéaire de u_1 et u_2.
- **d)** En déduire une expression de a_n et b_n en fonction de n.