Devoir maison 9.

À rendre le Lundi 10 février 2025

Exercice

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) \geq 0.$$

Partie 1 : Premiers exemples

1°) Montrer que $\exp \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2°) Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est un élément de $\mathcal{A}(]-\infty, 1[, \mathbb{R})$.

Partie 2 : Stabilité par quelques opérations

Dans cette partie, I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

3°) Soit f et g des éléments de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.
Montrer que $f + g \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ et que $fg \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

4°) Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)} \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

5°) Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. On pose $\varphi = \exp \circ f$.

a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, et exprimer φ' en fonction de f' et de φ.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $\varphi^{(n+1)}$ en fonction de dérivées successives de f et des dérivées de φ d'ordre plus petit.

c) Montrer alors, à l'aide d'une récurrence, que $\varphi \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

Partie 3 : Prolongement à gauche

Dans cette question, on suppose que I est un intervalle de la forme $I =]a, b[$, avec a et b des réels tels que $a < b$, ou bien avec a réel et $b = +\infty$.

6°) Soit $f \in \mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$.
Montrer que f est positive et croissante sur $]a, b[$, et en déduire que f admet une limite finie ℓ_0 en a, et que $\ell_0 \geq 0$.

7°) Montrer que si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ est continue et que $f \in \mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$, et $f'(a) \geq 0$.

8°) Soit $f \in \mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$.
À l'aide des questions 6 et 7, montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, b[$, et que la fonction f, ainsi prolongée, est dans $\mathcal{A}([a, b[, \mathbb{R})$.
Indication : On effectuera une récurrence en réfléchissant bien à la propriété à démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9°) Justifier par un contre-exemple qu'un tel prolongement n'est pas possible en b pour une fonction de $\mathcal{A}(]a, b[, \mathbb{R})$, avec $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.