Corrigé du devoir maison 8.

Partie 1

1°) On utilise $(*)$ avec le couple $(0,0)$: on obtient $f(0)=f(0)f(0)$, d'où $f(0)\,(1-f(0))=0$.
Ainsi $\boxed{f(0)=0 \text{ ou } f(0)=1}$.

2°) On suppose que $f(0)=0$.
Soit $x\geq 0$.
Alors, en utilisant $(*)$ avec le couple $(x,0)$, on obtient $f(\sqrt{x^2})=f(x)f(0)=0$, autrement dit $f(x)=0$ puisque $\sqrt{x^2}=|x|=x$.
Ainsi $\boxed{\text{pour tout } x\in\mathbb{R}_+,\ f(x)=0}$.

Soit $x<0$. Alors, en utilisant $(*)$ avec le couple (x,x), on obtient : $f(\sqrt{2x^2})=(f(x))^2$.
Or $\sqrt{2x^2}\in\mathbb{R}_+$ donc $f(\sqrt{2x^2})=0$ d'où $f(x)=0$.
Finalement, $\boxed{f \text{ est nulle sur } \mathbb{R} \text{ entier}}$.

3°) Soit $x\in\mathbb{R}_+$. On utilise $(*)$ avec le couple $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}},\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$, on obtient :

$f\left(\sqrt{\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^2}{2}}\right)=f\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2$ donc $f(\sqrt{x^2})\geq 0$.

Or, $\sqrt{x^2}=|x|=x$ car $x\geq 0$ donc $f(x)\geq 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x\in\mathbb{R}_+,\ f(x)\geq 0}$.

4°) **a)** Soit $n\in\mathbb{N}$. $u_{n+1}^2=\dfrac{x_0^2}{2^{n+1}}$ donc $2u_{n+1}^2=\dfrac{x_0^2}{2^n}=u_n^2$. Ainsi, $\boxed{2u_{n+1}^2=u_n^2}$.

b) On note, pour $n\in\mathbb{N}, H_n : f(u_n)=0$.

- $f(u_0)=f(x_0)=0$ par hypothèse. Donc H_0 est vraie.
- Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie.
  On applique $(*)$ au couple (u_{n+1},u_{n+1}) : $f\left(\sqrt{u_{n+1}^2+u_{n+1}^2}\right)=f(u_{n+1})^2$.
  Donc $f(\sqrt{2u_{n+1}^2})=(f(u_{n+1}))^2$. Donc, par la question précédente, $f(\sqrt{u_n^2})=f(u_{n+1})^2$.
  Or $\sqrt{u_n^2}=|u_n|=u_n$ car $u_n\geq 0$. Par H_n, $f(u_n)=0$.
  Finalement, $f(u_{n+1})=0$: H_{n+1} est vraie.
- On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ f(u_n)=0}$.

c) Comme $\sqrt{2}>1$, il vient : $\sqrt{2}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme f est continue en 0, $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$ ie $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Comme la suite $(f(u_n))$ est la suite nulle, on en déduit, par unicité de la limite que $0=1$: exclu.

Remarque : Donc pour tout $x>0, f(x)\neq 0$. Comme f est positive sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $x>0$, $f(x)>0$. C'est aussi vrai pour $x=0$.

5°) Soit $x\in\mathbb{R}_+$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $H_n : g(nx)=ng(x)$.

- $g(0)=\ln(f(0))=\ln(1)=1$. Donc $g(0)=0g(x)$. Ainsi H_0 est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie.

$$\begin{aligned} g((n+1)x) &= g(nx+x) \\ &= \ln\left(f(\sqrt{nx+x})\right) \\ &= \ln\left(f(\sqrt{\sqrt{nx}^2+\sqrt{x}^2}\right) \\ &= \ln\left(f(\sqrt{nx})f(\sqrt{x})\right) \text{ d'après } (*) \text{ avec le couple } (\sqrt{nx}, \sqrt{x}) \\ &= \ln\left(f(\sqrt{nx})\right) + \ln\left(f(\sqrt{x})\right) \\ &= g(nx) + g(x) \\ &= ng(x) + g(x) \text{ d'après } H_n \\ &= (n+1)g(x) \end{aligned}$$

  H_{n+1} est vraie.
- On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ g(nx) = ng(x)}$.

6°) Soit $r \in \mathbb{Q}_+$. Il existe des entiers naturels p et q avec $q \neq 0$ tels que $r = \dfrac{p}{q}$.

D'après la question précédente appliquée avec l'entier naturel $n = p$ et le réel positif $x = \dfrac{1}{q}$:

$g(r) = g\left(\dfrac{p}{q}\right) = pg\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{p}{q} \times qg\left(\dfrac{1}{q}\right)$.

Par la question précédente , puisque $q \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{1}{q} \in \mathbb{R}_+$: $g(r) = \dfrac{p}{q} g\left(q \times \dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{p}{q} g(1) = ar$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } r \in \mathbb{Q}_+,\ g(r) = ar.}$

7°) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il existe une suite de rationnels positifs (r_n) qui converge vers x (par exemple, la suite des valeurs décimales approchées par excès de x).
$\forall n \in \mathbb{N},\ g(r_n) = ar_n$.
$ar_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ar$.
g est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions continues donc g est continue en x.
Ainsi, $g(r_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$.

Par unicité de la limite, $\boxed{g(x) = ax}$.

8°) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $g(x^2) = ax^2$ donc $\ln(f(\sqrt{x^2})) = ax^2$ ie $f(\sqrt{x^2}) = \exp(ax^2)$.
$\sqrt{x^2} = |x| = x$ car $x \geq 0$ donc $\boxed{f(x) = \exp(ax^2)}$.

9°)
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
  Utilisons $(*)$ avec le couple $(-x, 0)$: $f(\sqrt{(-x)^2 + 0^2}) = f(-x)f(0)$ i.e. $f(\sqrt{x^2}) = f(-x)$.
  Puisque $\sqrt{x^2} = |x| = x$ car $x \geq 0$, il vient : $f(x) = f(-x)$.
  Donc $\boxed{f \text{ est paire}}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_-$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) && \text{par parité de } f \\ &= \exp(a(-x)^2) && \text{car } -x \in \mathbb{R}_+ \\ &= \exp(ax^2) \end{aligned}$$

  Finalement, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = \exp(ax^2)}$.

Partie 2

10°) Résumons la partie 1 (*Analyse)* : Si f est une solution du problème alors f est la fonction nulle ou f est de la forme $x \mapsto \exp(ax^2)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Vérifions la réciproque ie *la synthèse* :

- Si f est la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors f est continue et vérifie bien $(*)$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{ax^2} \end{array}$. Alors f est continue, et pour tout x et y réels,

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = e^{a(x^2+y^2)} = e^{ax^2} e^{ay^2} = f(x)f(y)$$

  Donc f vérifie $(*)$.

Finalement, l'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\{x \mapsto 0\} \cup \left\{x \mapsto e^{ax^2} \ / \ a \in \mathbb{R}\right\}}$$