Devoir maison 8.

À rendre le jeudi 30 janvier 2025

Exercice

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et qui vérifient :

$$(*)\ :\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)f(y).$$

Partie 1

Dans cette partie, on suppose que f est une solution du problème.

1°) Montrer que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

2°) Supposons que $f(0) = 0$.
Montrer que : f est nulle sur $\mathbb{R}_+$, puis que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite de la partie 1, on suppose désormais que $f(0) = 1$.

3°) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \geq 0$.

4°) Supposons dans cette question qu'il existe un réel $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) = 0$.

a) On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{x_0}{\sqrt{2}^n}$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+1}^2 = u_n^2$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = 0$.

c) En déduire une contradiction.

5°) On peut donc poser, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \ln\left(f(\sqrt{x})\right)$.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $g(nx) = ng(x)$.

6°) On pose $a = g(1)$. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}_+$, $g(r) = ar$.

7°) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = ax$.

8°) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \exp(ax^2)$.

9°) Montrer que f est paire. En déduire f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

10°) Conclure.