Corrigé du devoir maison 7.

Exercice 1

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction f_n est continue sur $[1, +\infty[$, qui est un intervalle.
De plus, f_n dérivable par produit et somme et :

$$\forall\, x \in [1, +\infty[, \quad f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(x) + x^n\frac{1}{x} = x^{n-1}\left(n\ln(x) + 1\right).$$

Or pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\ln(x) \geq 0$ et $x^{n-1} > 0$ donc $f_n'(x) > 0$. Ainsi f_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
Donc, par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f_n\left([1, +\infty[\right)$. Or $f_n(1) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, donc f_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$.
Comme $0 \in [-1, +\infty[$, 0 admet un unique antécédent x_n dans $[1, +\infty[$, ce qui revient à dire que $\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution } x_n \text{ dans } [1, +\infty[}$.
Remarque : Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^n \ln x_n = 1$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1}\ln(x_n) - 1 = x_n x_n^n \ln(x_n) - 1 = x_n - 1$ puisque $x_n^n \ln(x_n) = 1$.
Comme $x_n \geq 1$, on en déduit : $\boxed{f_{n+1}(x_n) \geq 0}$.
Or $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ donc $f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$.
Comme f_{n+1} est strictement croissante, nécessairement, $x_n \geq x_{n+1}$ (si on avait $x_n < x_{n+1}$, la stricte croissance de f_{n+1} imposerait $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$).
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est décroissante}}$.

3°) (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge.
Notons ℓ sa limite ; comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \geq 1$, on a $\ell \geq 1$.
Par l'absurde, supposons que $\ell > 1$.
On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^n \ln(x_n) = 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^n = \exp\left(n\ln(x_n)\right)$.
Comme $\ell > 1 > 0$, ln est continue en ℓ, donc $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell) > 0$.
D'où, par produit de limites, $n\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Par composition de limites, $\exp\left(n\ln(x_n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Par produit avec $\ln(x_n)$ qui tend vers $\ln(\ell) > 0$, on obtient que $x_n^n \ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Pourtant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^n \ln(x_n) = 1$, donc $x_n^n \ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$: contradication de l'unicité de la limite.
Donc $\boxed{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.}$

4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(1) = -1 \neq 0$, donc $x_n \neq 1$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(x_n) \neq 0$, ce qui nous permet d'écrire : $x_n^n = \dfrac{1}{\ln(x_n)}$.
Or $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 1$, donc $\ln(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(x_n) > 0$; on en déduit que $\boxed{x_n^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

Exercice 2

1°) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n : "les réels x_n et y_n existent et $1 < x_n < y_n$".

- P_0 est vraie car x_0 et y_0 existent et vérifient bien $1 < x_0 < y_0$ par hypothèse.
- Supposons P_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.
  Comme $y_n > x_n > 1$, les réels x_n et y_n sont positifs donc $\sqrt{x_n}$ et $\sqrt{y_n}$ existent, donc x_{n+1} et y_{n+1} existent bien.
  On a également $\sqrt{y_n} > \sqrt{x_n} > 1$ par stricte croissance de la fonction racine, d'où :
  $$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{y_n}\right) > \frac{1}{2}(1+1) = 1 \text{ et } y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} + y_n\right) > \frac{1}{2}(1+1) = 1$$
  Enfin,
  $$\begin{aligned} y_{n+1} - x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(y_n - x_n + \sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((\sqrt{y_n} + \sqrt{x_n})(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}) - (\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{y_n} + \sqrt{x_n} - 1\right)\left(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}\right) \end{aligned}$$
  Comme $\sqrt{y_n} > \sqrt{x_n}$, on a $\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n} > 0$, et on a aussi $\sqrt{x_n} > 1$ et $\sqrt{y_n} > 1$ donc $\sqrt{y_n} + \sqrt{x_n} - 1 > 1 > 0$. Ainsi, $y_{n+1} - x_{n+1} > 0$.
  On a bien montré que $y_{n+1} > x_{n+1} > 1$: P_{n+1} est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\text{les suites } (x_n) \text{ et } (y_n) \text{ sont bien définies, et pour tout } n \in \mathbb{N},\ 1 < x_n < y_n}$.

2°)
- Supposons que (x_n) converge. Notons ℓ sa limite.
  On a alors $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $\sqrt{y_n} = 2x_{n+1} - x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ell - \ell = \ell$, d'où $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell^2$. Ainsi, la suite (y_n) converge aussi.
  On a aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{x_n} = 2y_{n+1} - y_n$, donc $x_n = 4y_{n+1}^2 + y_n^2 - 4y_{n+1}y_n$. Par passage à la limite, on obtient $\ell = 4(\ell^2)^2 + (\ell^2)^2 - 4\ell^2\ell^2 = \ell^4$.
  Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 1$, par passage à la limite, $\ell \geq 1$. En particulier $\ell \neq 0$ donc on a $1 = \ell^3$, et comme ℓ est un réel, $\ell = 1$. On a donc $\ell^2 = 1$.
  Finalement, si (x_n) converge, alors (x_n) et (y_n) convergent toutes les deux vers 1.
- Dans le raisonnement ci-dessus, on n'a pas utilisé le fait que $x_0 < y_0$. Comme les relations de récurrences vérifiées par les deux suites sont symétriques, les rôles des deux suites sont symétriques dans le raisonnement ci-dessus, donc en échangeant les rôles de (x_n) et de (y_n) on obtient que si (y_n) converge, alors (x_n) et (y_n) convergent toutes les deux vers 1.
- Conclusion : $\boxed{\text{si l'une converge, alors l'autre aussi, et alors elles convergent toutes les deux vers 1.}}$

3°) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} - y_n)$.
Or $x_n > 1$ donc $\sqrt{x_n} \leq x_n$, et d'après la question 1, $x_n \leq y_n$, donc $\sqrt{x_n} \leq y_n$. Ainsi, $y_{n+1} - y_n \leq 0$.
Ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (y_n) est décroissante.
De plus (y_n) est minorée (par 1, d'après la question 1), donc (y_n) converge.
D'après la question 2, on peut conclure que $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ et } y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$

4°) Comme (y_n) est décroissante, si (x_n) et (y_n) étaient adjacentes, (x_n) serait croissante et puisque 1 est la limite commune à (x_n) et (y_n), on aurait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq 1 \leq y_n$.
Ce n'est pas possible d'après la question 1.
Donc $\boxed{(x_n) \text{ et } (y_n) \text{ ne sont pas adjacentes}}$.

5°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2}(\sqrt{y_n} - x_n)$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n : y_n \leq x_n^2$.

- Q_0 est vraie puisque $y_0 \leq x_0^2$.
- Supposons Q_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

  $x_{n+1}^2 = \dfrac{1}{4}(x_n^2 + y_n + 2x_n\sqrt{y_n})$.

  Or, par hypothèse de récurrence, $x_n^2 \geq y_n$, donc

  $$x_{n+1}^2 \geq \frac{1}{4}(2y_n + 2x_n\sqrt{y_n}) = \frac{1}{2}(y_n + x_n\sqrt{y_n})$$

  Or $x_n > 1$ donc $x_n \geq \sqrt{x_n}$, et $\sqrt{y_n} > 1$ donc par produit, $x_n\sqrt{y_n} \geq \sqrt{x_n}$. On obtient bien :

  $$x_{n+1}^2 \geq \frac{1}{2}(y_n + \sqrt{x_n}) = y_{n+1}.$$

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \leq x_n^2$, donc $\sqrt{y_n} \leq x_n$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2}(\sqrt{y_n} - x_n) \leq 0$. Donc $\boxed{(x_n) \text{ est décroissante}}$.