Devoir maison 7.

À rendre le lundi 6 janvier 2025

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \begin{array}{rcl} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \ln(x) - 1 \end{array}$.

1°) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $[1, +\infty[$, que l'on notera x_n.

2°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier le signe de $f_{n+1}(x_n)$ et en déduire le sens de variation de la suite (x_n).

3°) Montrer que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

4°) Montrer que $x_n^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 2

Soient x_0 et y_0 des réels tels que $1 < x_0 < y_0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{y_n}\right) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} + y_n\right) \end{cases}$$

1°) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont bien définies, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < x_n < y_n$.

2°) Montrer que si l'une des deux suites (x_n) ou (y_n) converge, alors l'autre aussi, et déterminer dans ce cas leurs limites.

3°) Montrer que (y_n) converge et conclure.

4°) Les suites (x_n) et (y_n) sont-elles adjacentes ?

5°) On suppose de plus que $y_0 \leq x_0^2$.
Montrer que (x_n) est décroissante.