Corrigé du devoir maison 6.

Exercice 1

1°) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Alors $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$. Ce qui s'écrit $x - 1 < \lfloor x \rfloor < x$.
$-x \notin \mathbb{Z}$ donc $\lfloor -x \rfloor < -x < \lfloor -x \rfloor + 1$. D'où $-x - 1 < \lfloor -x \rfloor < -x$.
En sommant membre à membre, $-2 < \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor < 0$.
Or $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor \in \mathbb{Z}$. Donc $\boxed{\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1}$ (car -1 est le seul entier de l'intervalle $]-2, 0[$).

2°) a) Soit $k \in \{1, \dots, q-1\}$.
Supposons que $\dfrac{kp}{q} \in \mathbb{Z}$. Alors q divise kp. Or q et p sont premiers entre eux donc, par le lemme de Gauss, q divise k : ceci est exclu puisque $k \leq q - 1$.
Ainsi, $\dfrac{kp}{q} \notin \mathbb{Z}$. D'où $\left\lfloor \dfrac{kp}{q} \right\rfloor + \left\lfloor -\dfrac{kp}{q} \right\rfloor = -1$.
Donc, $S + T = \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \left(\left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor + \left\lfloor -\frac{kp}{q} \right\rfloor \right) = \sum_{k=1}^{q-1} -1 = -(q-1)$.
Finalement, $\boxed{S + T = 1 - q}$.

b)

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor -\frac{kp}{q} \right\rfloor \\
&= \sum_{j=1}^{q-1} \left\lfloor -\frac{(q-j)p}{q} \right\rfloor \qquad \text{en posant } j = q - k \text{ (donc } k = q - j) \\
&= \sum_{j=1}^{q-1} \left\lfloor -p + \frac{jp}{q} \right\rfloor \\
&= \sum_{j=1}^{q-1} \left(-p + \left\lfloor \frac{jp}{q} \right\rfloor \right) \qquad \text{car } p \in \mathbb{Z} \\
&= -p(q-1) + \sum_{j=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{jp}{q} \right\rfloor \\
T &= -p(q-1) + S
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\boxed{S - T = p(q-1)}$.

c) On sait : $\begin{cases} S + T = -(q-1) \\ S - T = p(q-1) \end{cases}$ donc en faisant la demi-somme : $\boxed{S = \dfrac{(p-1)(q-1)}{2}}$.

Exercice 2

1°) S_H est l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 d'équation caractéristique (K) : $r^2 - 5r + 6 = 0$.
Son discriminant est $\Delta = 25 - 24 = 1$, les solutions de (K) sont donc $\dfrac{5+1}{2} = 3$ et $\dfrac{5-1}{2} = 2$.
D'après le cours, si $u \in S_H$, alors il existe des réels λ et μ tels que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda 3^n + \mu 2^n$.

Dans le cours, nous n'avons pas explicitement écrit la réciproque, mais elle est vraie : si λ et μ sont des réels et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda 3^n + \mu 2^n$, alors $u \in S_H$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n &= \lambda 3^{n+2} + \mu 2^{n+2} - 5(\lambda 3^{n+1} + \mu 2^{n+1}) + 6(\lambda 3^n + \mu 2^n) \\
&= \lambda.3^n \left(3^2 - 5.3 + 6\right) + \mu.2^n \left(2^2 - 5.2 + 6\right) \\
&= 0 \text{ car 3 et 2 sont solutions de } (K)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{S_H = \left\{u \in \mathbb{R}^N \ / \ \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda 3^n + \mu 2^n\right\}}$.

2°) Soit A un réel, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = A.5^n$.

$$\begin{aligned}
(v_n) \in S &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n = 5^n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N},\ A.5^{n+2} - 5.A.5^{n+1} + 6.A.5^n = 5^n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N},\ 6.A.5^n = 5^n \\
&\iff A = \frac{1}{6} \qquad \text{car pour tout } n \in \mathbb{N},\ 5^n \neq 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ telle que pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{6}5^n, \text{ est dans } S.}$

3°) Soit (u_n) une suite de réels.

$$\begin{aligned}
(u_n) \in S &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 5^n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n \qquad \text{car } (v_n) \in S \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N},\ (u_{n+2} - v_{n+2}) - 5(u_{n+1} - v_{n+1}) + 6(u_n - v_n) = 0 \\
&\iff (u_n - v_n) \in S_H \\
&\iff \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n - v_n = \lambda 3^n + \mu 2^n \\
&\iff \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda 3^n + \mu 2^n + \frac{1}{6}5^n
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{S = \left\{u \in \mathbb{R}^N \ / \ \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda 3^n + \mu 2^n + \frac{1}{6}5^n\right\}}$.

On a un résultat similaire à celui pour les équations différentielles : S est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire d'inconnue $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et S_H est l'ensemble des solutions de équation homogène associée. On constate que les éléments de S sont bien les sommes d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.

Exercice 3

1°) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note H_n : le réel u_n existe et $u_n > 0$.

- H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
  On suppose que H_n est vraie i.e. u_n existe et $u_n > 0$. Alors, $1 + nu_n > 0$.
  Donc, comme quotient de deux réels strictement positifs, u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$. Ainsi, H_{n+1} est vraie.
- On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n > 0}$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} &= \frac{1+nu_n}{u_n} - \frac{1}{u_n}\\ &= \frac{1}{u_n} + n - \frac{1}{u_n}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = n}$$

3°) *Méthode 1 : faire apparaître une somme télescopique*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k} = k.$

En sommant de $k = 0$ à $k = n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} k$$

$$\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{par téléscopage}$$

$$\frac{1}{u_n} = 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2+n(n-1)}{2}$$

$$\boxed{u_n = \frac{2}{n(n-1)+2}}$$

Méthode 2 : Conjecturer une formule pour $\dfrac{1}{u_n}$ comme dans l'exo 1 du TD 8

Ainsi, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, on a $v_0 = 1$ et :

$$\forall\, n \in n,\ v_{n+1} = v_n + n.$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n : $v_n = v_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k$.

- P_1 est vraie car $v_1 = v_0 + 0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{1-1} k = 0$.

- Supposons P_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
  $v_{n+1} = v_n + n = v_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k + n = v_0 + \sum_{k=0}^{n} k$, donc P_{n+1} est vraie.
- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k$ i.e. $\dfrac{1}{u_n} = 1 + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{2+n(n-1)}{2}$.

On retrouve que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n = \dfrac{2}{2+n(n-1)}}$.

Ainsi, par opérations, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.