Devoir maison 6.

À rendre le jeudi 12 décembre 2024

Exercice 1

Soit p et q deux entiers naturels non nuls tels que $q \geq 2$.
On suppose p et q premiers entre eux, ce qui signifie qu'ils n'ont pas de facteur en commun. Cela peut aussi s'écrire $\mathrm{pgcd}(p,q)=1$.
On souhaite prouver dans cet exercice que :

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

On admettra le résultat suivant, appelé *lemme de Gauss* :
si a, b, c sont des entiers tels que a divise bc et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

1°) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.

2°) On pose $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor$ et $T = \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor -\frac{kp}{q} \right\rfloor$.

- **a)** Calculer $S+T$.
- **b)** Effectuer le changement de variables $j = q-k$ dans la somme T.
  En déduire $S-T$.
- **c)** Conclure.

Exercice 2

On note S l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 5^n$$

et on note S_H l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0.$$

1°) Déterminer l'ensemble S_H.

2°) Déterminer une suite particulière de l'ensemble S, en la cherchant sous une forme bien choisie. On la notera $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3°) En déduire, en justifiant soigneusement, l'ensemble S. Quel point commun observe-t-on avec les équations différentielles linéaires ?

Exercice 3

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+nu_n}. \end{cases}$

1°) Justifier que la suite (u_n) existe et que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

2°) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

3°) En déduire u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la limite de (u_n) ?