Corrigé du devoir maison 5.

1°) $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left(-(1-x)^{\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}}$.

2°) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

On pose, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = x^{n+1}$ et $g(x) = -\dfrac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$. Les fonctions f et g sont de classe C^1, et pour tout $x \in [0,1]$,

$$f'(x) = (n+1)x^n \qquad \text{et} \qquad g'(x) = \sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}}$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \left[-\frac{2}{3}x^{n+1}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 x^n(1-x)\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}(n+1)\left(\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x\right) \\
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)(u_n - u_{n+1})}$$

b) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
3u_{n+1} &= 2(n+1)u_n - 2(n+1)u_{n+1} \\
(2n+5)u_{n+1} &= 2(n+1)u_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= \frac{(2(n+1)+3)!}{(n+1)!\,((n+1)+1)!}u_{n+1} \\
&= \frac{(2n+5)!}{(n+1)!(n+2)!}\frac{2n+2}{2n+5}u_n \qquad \text{par la question précédente} \\
&= \frac{(2n+4)!}{(n+1)n!(n+2)!}2(n+1)u_n \\
&= \frac{(2n+4)(2n+3)!}{n!(n+2)(n+1)!}2u_n \\
&= \frac{2(2n+3)!}{n!(n+1)!}2u_n \qquad \text{car } 2n+4 = 2(n+2) \\
&= 4\alpha_n
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (\alpha_n) \text{ est géométrique de raison 4.}}$

d) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = 4^n \alpha_0$.

Or $\alpha_0 = \dfrac{(3)!}{0!(1)!} u_0 = 6u_0 = 6\dfrac{2}{3} = 4$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = 4^{n+1}$ d'où $\boxed{u_n = \dfrac{n!(n+1)!}{(2n+3)!} 4^{n+1}}$.

3°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Posons $x = 1 - t^2$; la fonction $t \mapsto 1 - t^2$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a $\mathrm{d}x = -2t\,\mathrm{d}t$. On a $x = 0$ pour $t = 1$ et $x = 1$ pour $t = 0$, donc, par changement de variable dans u_n :

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_1^0 (1-t^2)^n \sqrt{1-(1-t^2)}(-2t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (1-t^2)^n \sqrt{t^2} 2t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^1 (1-t^2)^n t^2\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } \sqrt{t^2} = t \text{ lorsque } t \in [0,1] \\
&= 2\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k}(-t^2)^k\right) t^2\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^{2k+2}\right) \mathrm{d}t \\
&= 2\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \left(\int_0^1 t^{2k+2}\,\mathrm{d}t\right) \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= 2\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \left[\frac{1}{2k+3} t^{2k+3}\right]_0^1 \\
&= 2\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \left(\frac{1}{2k+3} - 0\right) \\
\frac{n!(n+1)!}{(2n+3)!} 4^{n+1} &= 2\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+3} \qquad \text{en utilisant la question précédente}
\end{aligned}$$

d'où $$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+3} = \frac{n!(n+1)!}{(2n+3)!} \frac{(2^2)^{n+1}}{2}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+3} = \frac{n!(n+1)!}{(2n+3)!} 2^{2n+1}}$$

4°) **a)** $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = [-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = -0 + 1 = 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
I_n - I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2n+1}\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2n+3}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\sin\theta)^{2n+1} - (\sin\theta)^{2n+3}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2n+1}\left(1 - (\sin\theta)^2\right)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Posons $x = (\sin\theta)^2$, la fonction $\theta \mapsto (\sin\theta)^2$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
On a $\mathrm{d}x = 2\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$, ce qui peut s'écrire $2\sqrt{1-(\sin\theta)^2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car $\cos\theta \geq 0$ sur cet intervalle.
Si $\theta = 0$ alors $x = 0$, si $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors $x = 1$.

$$\begin{aligned}
I_n - I_{n+1} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\sin\theta)^2\right)^n \sqrt{1-(\sin\theta)^2}2\sqrt{1-(\sin\theta)^2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{par le changement de variable}
\end{aligned}$$

On obtient bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2}u_n}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2n+2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$.
On pose, pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $u(\theta) = (\sin\theta)^{2n+2}$ et $v(\theta) = -\cos\theta$. Les fonctions u et v sont de classe C^1, et pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$u'(\theta) = (2n+2)\cos\theta(\sin\theta)^{2n+1} \qquad \text{et} \qquad v'(\theta) = \sin\theta$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \left[-(\sin\theta)^{2n+2}\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n+2)\cos\theta(\sin\theta)^{2n+1}(-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 0 - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n+2)(\cos\theta)^2(\sin\theta)^{2n+1}\,\mathrm{d}\theta \\
&= (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-(\sin\theta)^2\right)(\sin\theta)^{2n+1}\,\mathrm{d}\theta \\
&= (2n+2)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2n+1}\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2n+3}\,\mathrm{d}\theta\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{I_{n+1} = (2n+2)\left(I_n - I_{n+1}\right)}$$

d) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (2n+2)\dfrac{u_n}{2} = (n+1)u_n$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
I_n &= nu_{n-1} \\
&= n\frac{(n-1)!n!}{(2n+1)!}4^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{I_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}4^n.}$$

Et c'est encore valable pour $n = 0$ car $I_0 = 1$ et $\dfrac{(0!)^2}{(1)!}4^0 = 1$.