Devoir maison 5.

À rendre le jeudi 21 novembre 2024

Exercice

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

1°) Calculer u_0.

2°) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}(n+1)(u_n - u_{n+1})$.

b) En déduire une expression de u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \dfrac{(2n+3)!}{n!(n+1)!}u_n$. Justifier que (α_n) est une suite géométrique.

d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3°) A l'aide du changement de variable $x = 1 - t^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+3} = \frac{(n+1)!n!}{(2n+3)!} 2^{2n+1}.$$

4°) *Question facultative*

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2n+1}\,\mathrm{d}\theta.$$

a) Calculer I_0.

b) À l'aide du changement de variable $x = (\sin\theta)^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2}u_n.$$

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = (2n+2)\left(I_n - I_{n+1}\right).$$

d) Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}4^n$.