Corrigé du devoir maison 4.

Exercice 1

1°) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $0 \leq 1+\sin(x) \leq 2$, donc $0 \leq \dfrac{1+\sin x}{2} \leq 1$.

Donc $\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{2}}$ existe et par croissance de la fonction racine, $0 \leq \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{2}} \leq 1$.

De plus, Arcsin est définie sur $[-1,1]$ donc $f(x)$ existe.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est définie sur } D = \mathbb{R}.}$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+2\pi) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin(x+2\pi)}{2}}\right) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}}\right) = f(x)$ car sin est 2π-périodique.

Donc $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(\pi - x) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin(\pi-x)}{2}}\right) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}}\right)$, ainsi

$\boxed{f(\pi-x) = f(x)}$.

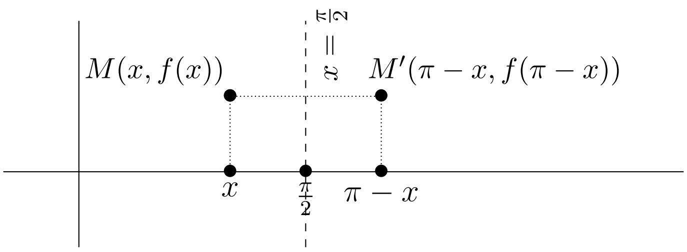
Interprétation géométrique :

Considérons M le point de la courbe représentative de f d'abscisse x, et M' le point de la courbe représentative de f d'abscisse $\pi - x$.

Leurs coordonnées sont $M\,(x, f(x))$ et $M'\,(\pi - x, f(\pi - x))$, mais comme $f(\pi - x) = f(x)$, ces deux points ont même ordonnée.

Par ailleurs, on remarque que $\dfrac{x+(\pi-x)}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ i.e. l'abscisse du point milieu du segment $[MM']$ est toujours $\dfrac{\pi}{2}$. Ce milieu est donc sur la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Finalement, les points M et M' sont symétriques par rapport à cette droite.



Ainsi, $\boxed{\text{la droite d'équation } x = \dfrac{\pi}{2} \text{ est axe de symétrie}}$.

d) Comme f est 2π-périodique il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π. On choisit ici $\left[\dfrac{\pi}{2} - \pi, \dfrac{\pi}{2} + \pi\right]$ i.e. $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Comme cet intervalle est centré en $\dfrac{\pi}{2}$, la symétrie établie à la question précédente permet de $\boxed{\text{réduire l'étude seulement sur } I = [-\pi/2, \pi/2]}$.

Pour obtenir le tracé sur $\mathbb{R}$:

Par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient la courbe sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Puis on complète par translations de vecteurs $2k\pi\overrightarrow{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2°) a) Par somme, la fonction $x \mapsto \dfrac{1+\sin(x)}{2}$ est dérivable (sur $\mathbb{R}$).

Pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, alors $-1 < \sin(x) < 1$, donc $0 < 1+\sin(x) < 2$ puis $0 < \dfrac{1+\sin(x)}{2} < 1$.

Ainsi, la fonction $x \mapsto \dfrac{1+\sin(x)}{2}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}}$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, en reprenant l'encadrement plus haut, on obtient $0 < \sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}} < 1$ par stricte croissance de la fonction racine.

Ainsi, la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}}$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et à valeurs dans $]0, 1[$ donc à valeurs dans $]-1, 1[$.

Comme Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$, par composition, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[}$ (au moins).

b) $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\cos x}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}\right)^2}} \\
&= -\frac{\cos x}{2\sqrt{2}\sqrt{1+\sin x}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{2-(1+\sin x)}{2}}} \\
&= -\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}\sqrt{1-\sin x}} \\
&= -\frac{\cos x}{2\sqrt{1-\sin^2 x}} \\
&= -\frac{\cos x}{2\sqrt{\cos^2 x}} \\
&= -\frac{\cos x}{2|\cos x|} \\
\boxed{f'(x) = -\frac{1}{2}} & \qquad \text{car } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ donc } \cos x > 0
\end{aligned}$$

c) Comme $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ est un intervalle, on en déduit que :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, f(x) = -\frac{x}{2} + c$$

En utilisant la valeur particulière $x = 0$, on trouve $c = \text{Arccos}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}$.

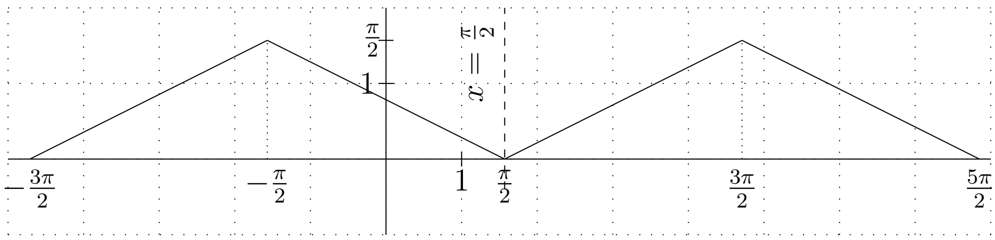
On vérifie les valeurs de f en $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \text{Arccos}(0) = \dfrac{\pi}{2}$, c'est bien égal à $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4}$.

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \text{Arccos}(1) = 0$, c'est bien égal à $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}$.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}.}$

d) Tracé de la courbe représentative de f sur $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$:



Exercice 2

1°) Le trinôme a pour discriminant $\Delta = (2+3i)^2 - 4 = 4 + 12i - 9 - 4 = -9 + 12i$.

Cherchons les racines carrées de Δ. Soit $\delta = x + iy$ où x et y sont des réels.

$$\begin{aligned}
\delta^2 = -9 + 12i &\iff \begin{cases} \delta^2 = -9 + 12i \\ |\delta|^2 = |-9 + 12i| \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x+iy)^2 = -9 + 12i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{81 + 144} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -9 + 12i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{225} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -9 \\ 2xy = 12 \\ x^2 + y^2 = 15 \end{cases} \qquad \text{par unicité de l'écriture algébrique} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = 3 & \frac{L_1 + L_3}{2} \\ y^2 = 12 & \frac{L_3 - L_1}{2} \\ xy > 0 \end{cases} \\
&\iff x + iy = \sqrt{3} + i\sqrt{12} \text{ ou } x + iy = -\sqrt{3} - i\sqrt{12} \\
&\iff \delta = \sqrt{3} + 2i\sqrt{3} \text{ ou } \delta = -\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

On choisit $\delta = \sqrt{3} + 2i\sqrt{3}$.

Les racines sont : $z_1 = \dfrac{2 + 3i + \sqrt{3} + 2i\sqrt{3}}{2} = \boxed{\dfrac{2 + \sqrt{3} + i(3 + 2\sqrt{3})}{2}}$

et $z_2 = \dfrac{2 + 3i - (\sqrt{3} + 2i\sqrt{3})}{2} = \boxed{\dfrac{2 - \sqrt{3} + i(3 - 2\sqrt{3})}{2}}$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } \{z_1, z_2\}.}$

2°) Soit $z = a + ib$ où a et b sont des réels.

$\dfrac{a-ib}{a^2+b^2} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}$ donc $\boxed{\dfrac{a-ib}{a^2+b^2} = \dfrac{1}{z}}$.

3°) Soit x et y des réels positifs. On pose $a = \sqrt{x}$ et $b = \sqrt{y}$.

$$\begin{aligned}
(S_1) &\iff \begin{cases} a\left(1 + \dfrac{1}{a^2+b^2}\right) = 2 \\ b\left(1 - \dfrac{1}{a^2+b^2}\right) = 3 \end{cases} \\
&\iff a\left(1 + \frac{1}{a^2+b^2}\right) + ib\left(1 - \frac{1}{a^2+b^2}\right) = 2 + 3i \qquad \text{par unicité de l'écriture algébrique} \\
&\iff a + ib + \frac{a-ib}{a^2+b^2} = 2 + 3i \\
&\iff z + \frac{1}{z} = 2 + 3i \qquad \text{en posant } z = a + ib \text{ et en utilisant la question 2} \\
&\iff z^2 + 1 = (2+3i)z \\
&\iff z^2 - (2+3i)z + 1 = 0 \\
&\iff z = z_1 \text{ ou } z = z_2 \qquad \text{par la question 1}
\end{aligned}$$

$\mathrm{Re}(z_1) > 0$ et $\mathrm{Im}(z_1) > 0$.
$9 < 12$ donc $3 < 2\sqrt{3}$ donc $\mathrm{Im}(z_2) < 0$. Ainsi, on ne peut pas avoir $z = z_2$ car $\mathrm{Im}(z) = b \geq 0$.

$$\begin{aligned}
(S) &\iff z = z_1 \\
&\iff a = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \text{ et } b = \frac{3+2\sqrt{3}}{2} \qquad \text{par unicité de l'écriture algébrique} \\
&\iff \sqrt{x} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sqrt{y} = \frac{3+2\sqrt{3}}{2} \\
&\iff x = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{ et } y = \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\right)^2 \qquad \text{car } \frac{2+\sqrt{3}}{2} \geq 0 \text{ et } \frac{3+2\sqrt{3}}{2} \geq 0 \\
&\iff x = \frac{7+4\sqrt{3}}{4} \text{ et } y = \frac{21+12\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{(S) \text{ possède une unique solution : le couple } \left(\dfrac{7+4\sqrt{3}}{4}, \dfrac{21+12\sqrt{3}}{4}\right)}$.