Devoir maison 4.

À rendre le lundi 4 novembre 2024

Exercice 1

On suppose le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La fonction f est définie par $f(x) = \text{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{2}}\right)$.

1°) a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

b) Montrer que f est périodique.

c) Calculer $f(\pi - x)$ pour tout $x \in D$.
Justifier alors précisément que la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe représentative de f.

d) Justifier qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
On expliquera comment on obtient la courbe sur l'ensemble de définition de f.

2°) a) Justifier que f est dérivable au moins sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

c) En déduire une expression simple de $f(x)$ pour tout $x \in I$.

d) Tracer la courbe représentative de f sur $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Exercice 2

Le but est de résoudre le système (S) suivant d'inconnue (x, y) où x et y sont des réels positifs :

$$(S) : \begin{cases} \sqrt{x}\left(1 + \dfrac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{y}\left(1 - \dfrac{1}{x+y}\right) = 3 \end{cases}$$

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (2+3i)z + 1 = 0$.

2°) Soit $z = a + ib$ où a et b sont des réels. Exprimer simplement $\dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$ en fonction de z.

3°) Soit x et y des réels positifs.
En posant dans (S), $a = \sqrt{x}$ et $b = \sqrt{y}$, déterminer toutes les solutions du système (S).