Corrigé du devoir maison 3.

Exercice 1

On va raisonner par analyse-synthèse.

- **Analyse**
  Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie la relation $(*)$.
  On a donc, pour tout réel x, $f(x) + xf(1-x) = 1 + x$, mais aussi, en évaluant $(*)$ en $1-x$:

$$\begin{aligned} f(1-x) + (1-x)f\left(1-(1-x)\right) &= 1+1-x \\ \text{i.e.} \quad f(1-x) + (1-x)f(x) &= 2-x \\ \text{d'où} \quad f(1-x) &= 2-x-(1-x)f(x). \end{aligned}$$

  On obtient donc, en remplaçant dans la première égalité :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + x\left(2-x-(1-x)f(x)\right) &= 1+x \\ f(x) + 2x - x^2 - (x-x^2)f(x) &= 1+x \\ (1-x+x^2)f(x) &= 1-x+x^2 \end{aligned}$$

  Le discriminant du trinôme $x^2 - x + 1$ vaut $(-1)^2 - 4 = -3 < 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - x + x^2 \neq 0$, ce qui nous permet d'obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1.$$

- **Synthèse**
  Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$.
  Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + xf(1-x) = 1 + x \times 1 = 1 + x.$$

  Ainsi, f vérifie $(*)$.

- **Conclusion**
  $\boxed{\text{Il existe une unique fonction } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ vérifiant } (*), \text{ c'est la fonction constante égale à } 1.}$

Exercice 2

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\binom{n+1}{k}(-1)^{k-1} \ - \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k}(-1)^{k-1} \\ &= \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n+1}(-1)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n+1}{k}(-1)^{k-1} \ - \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k}(-1)^{k-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}\right)(-1)^{k-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_{n+1} - S_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}(-1)^{k-1}} \quad \text{d'après la formule du triangle de Pascal}$$

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} &= \frac{1}{k}\frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k+1)!} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}}$$

3°) Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
S_{n+1} - S_n &= \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{k-1} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}(-1)^k \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k 1^{n+1-k} - \binom{n+1}{0}(-1)^0 - \binom{n+1}{n+1}(-1)^{n+1}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left((-1+1)^{n+1} - 1 - (-1)^{n+1}\right) \text{ par la formule du binôme de Newton} \\
&= -\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}}$$

4°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$, $S_1 = \frac{1}{1}\binom{1}{1}(-1)^{1-1} = 1$, c'est bien égal à $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}$.

Supposons maintenant $n \geq 2$. On a donc, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $S_{k+1} - S_k = \frac{1}{k+1}$. Sommons toutes ces égalités :

$$\sum_{k=1}^{n-1}(S_{k+1} - S_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}$$

$$S_2 - S_1 + S_3 - S_2 + S_4 - S_3 + \cdots + S_n - S_{n-1} = \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j} \quad \text{(changement d'indice } j = k+1\text{)}$$

$$S_n - S_1 = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \quad \text{(somme télescopique, indice } j \text{ muet)}$$

$$S_n = S_1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \text{ car } S_1 = 1 = \frac{1}{1}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$.