Devoir maison 3.

À rendre le vendredi 11 octobre 2024

Exercice 1

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$(*) \ : \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1-x) = 1 + x.$$

Indication : On pourra s'intéresser à la relation évaluée en $1 - x$.

Exercice 2

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{n}{k} (-1)^{k-1}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1°) Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n$; on se servira de la formule du triangle de Pascal, et il restera un symbole $\sum$.

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}.$$

3°) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}.$$

4°) Conclure, sans utiliser de raisonnement par récurrence.