Corrigé du devoir maison 2.

Exercice

1°) φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $a > 0$, $b > 0$,

$$\begin{aligned}\varphi(ab) &= ab\ln(ab) \\ &= ab(\ln a + \ln b) \\ &= ba\ln a + ab\ln b \\ &= b\varphi(a) + a\varphi(b)\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\varphi \in \mathcal{E}}$.

2°) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $a > 0$, $b > 0$.

$$\begin{aligned}\lambda\varphi(ab) &= \lambda(b\varphi(a) + a\varphi(b)) \\ &= b\lambda\varphi(a) + a\lambda\varphi(b)\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\lambda\varphi \in \mathcal{E}}$.

3°) a) On pose $a = b = 1$ dans $(*)$. Alors, $f(1) = f(1) + f(1)$ i.e. $\boxed{f(1) = 0}$.

b) Soit $b > 0$.
$\forall a > 0$, $f(ab) = bf(a) + af(b)$.
Les fonctions $a \mapsto f(ab)$ et $a \mapsto bf(a) + af(b)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et égales, donc leurs dérivées sont aussi égales :

$$\boxed{\forall a > 0,\ bf'(ab) = bf'(a) + f(b).}$$

c) On a obtenu, par la question précédente : $\forall a > 0,\ \forall b > 0,\ bf'(ab) = bf'(a) + f(b)$.
Soit $x > 0$. On pose $a = 1$ et $b = x$.
Alors, $xf'(x) = xf'(1) + f(x)$ donc $\boxed{xf'(x) - f(x) = \lambda x}$ en posant $\lambda = f'(1)$.

d) La fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par quotient, et pour tout $x > 0$,
$g'(x) = \dfrac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$ donc $g'(x) = \dfrac{\lambda x}{x^2}$ par la question précédente, soit $g'(x) = \dfrac{\lambda}{x}$.
Les dérivées de g et $x \mapsto \lambda\ln x$ sont égales sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, on en déduit qu'il existe une constante réelle c telle que :

$$\forall x > 0,\ g(x) = \lambda\ln x + c.$$

Or $g(1) = \dfrac{f(1)}{1} = 0$ et $\ln 1 = 0$ donc $c = 0$, et $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ g(x) = \lambda\ln x}$.

e) Ainsi, pour tout $x > 0$, $f(x) = \lambda x\ln x$ i.e. $\boxed{f = \lambda\varphi}$.

4°)
- Dans la question 2, on a montré que toute fonction de la forme $\lambda\varphi$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, est élément de $\mathcal{E}$.
- Dans la question 3, on a montré que si $f \in \mathcal{E}$ alors f s'écrit $\lambda\varphi$ où λ est un réel (c'est $f'(1)$).

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble } \mathcal{E} \text{ est égal à l'ensemble des fonctions } \lambda\varphi \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$.

Ce qui s'écrit : $\boxed{\mathcal{E} = \{\lambda\varphi \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}}$.