Devoir maison 2.

À rendre le lundi 23 septembre 2024

Exercice

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$(*) \quad : \quad \forall a > 0,\ \forall b > 0, \quad f(ab) = af(b) + bf(a).$$

On note de plus :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \ln x. \end{array}$$

1°) Montrer que $\varphi \in \mathcal{E}$.

2°) Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda\varphi \in \mathcal{E}$.

3°) Dans la question 3, f désigne une fonction de $\mathcal{E}$.

a) Montrer que $f(1) = 0$.

b) Soit $b > 0$ fixé. Quelle égalité obtient-on en dérivant la relation $(*)$ par rapport à a ?

c) En choisissant des valeurs judicieuses de a et b, montrer que :

$$\forall x > 0,\ xf'(x) - f(x) = \lambda x$$

en posant $\lambda = f'(1)$.

d) En déduire l'expression de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

e) En déduire que $f = \lambda\varphi$.

4°) Quel est le résultat que l'on a démontré dans cet exercice ?