Devoir maison 1.

Exercice

Partie 1 : Étude de f

1°) a) La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(x) = 3x^2 - 2\frac{1}{x} = \frac{3}{x}\left(x^3 - \frac{2}{3}\right).$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) = 0 \iff x^3 - \frac{2}{3} = 0 \iff x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

et

$$g'(x) > 0 \iff x > \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

par stricte croissance de la fonction cube et car $\dfrac{3}{x} > 0$.

On en tire que $g' < 0$ sur $\left]0, \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right[$ donc $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } \left]0, \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right]}$, et $\boxed{\text{strictement croissante sur } \left[\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, +\infty\right[}$.

b) Ainsi, g possède un minimum atteint en $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Calculons :

$$g\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3} - 2\ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) + 1 = \frac{5}{3} - 2\ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$$

Mais comme $\dfrac{2}{3} \in]0,1[$, on a $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \in]0,1[$, et donc $-2\ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) > 0$.

Ainsi, $g\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) > 0$.

Puisqu'il s'agit de la valeur minimale de g, on a bien, $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ g(x) > 0}$.

2°) Par somme et quotient de fonctions dérivables, f est dérivable, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}x^2 - \ln(x)2x}{(x^2)^2} + 1 \\ &= \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} + 1 \\ &= \frac{1 - 2\ln(x) + x^3}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^3 > 0$ et $g(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$. D'où le tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

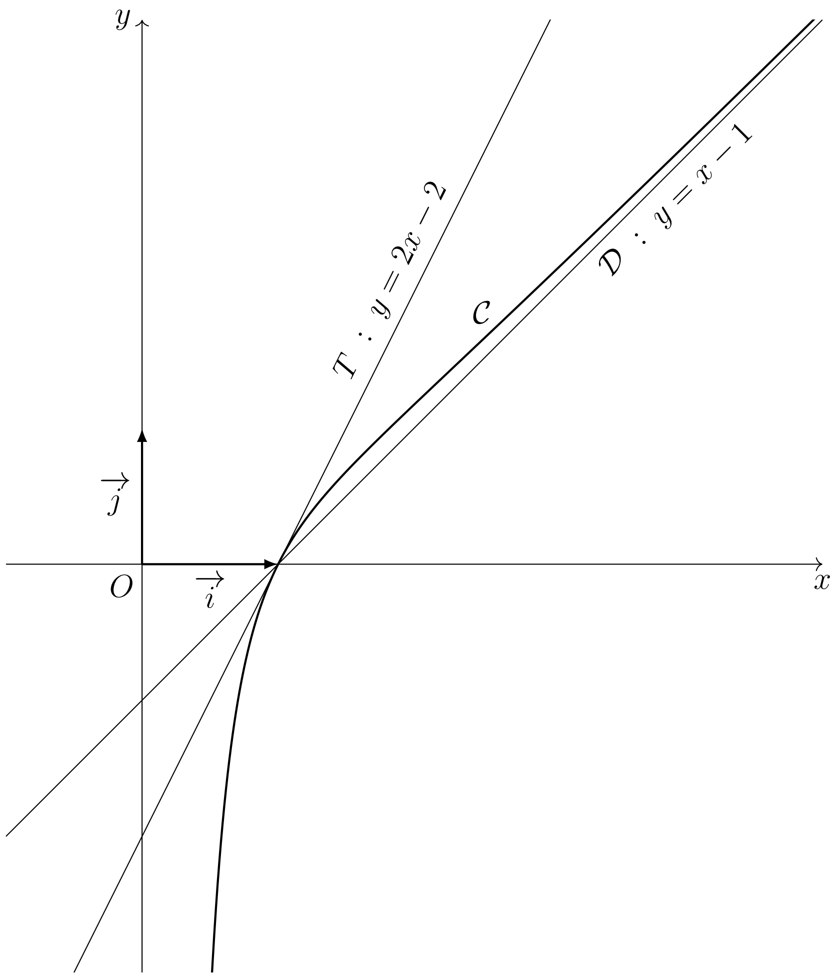
La limite en $+\infty$ s'explique par le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (croissance comparée). En 0, on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et x^2 est une quantité positive, d'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$.

3°) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) - (x-1) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = 0$. Cela signifie que $\boxed{\text{la droite } \mathcal{D} \text{ d'équation } y = x-1 \text{ est asymptote à la courbe de } \mathcal{C} \text{ en } +\infty.}$

De plus, connaissant le signe de ln et sachant que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x^2} > 0$, on a $f(x)-(x-1) < 0$ pour $x \in]0,1[$, $f(x)-(x-1) = 0$ pour $x = 1$, et $f(x)-(x-1) > 0$ pour $x > 1$.
Cela signifie que $\boxed{\mathcal{C} \text{ est en dessous de } \mathcal{D} \text{ sur }]0,1[}$, que $\boxed{\mathcal{C} \text{ est au dessus de } \mathcal{D} \text{ sur }]1,+\infty[}$, et que $\boxed{\text{les deux courbes se croisent uniquement au point d'abscisse } 1}$.

4°) Une équation de T est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
On a $f'(1) = \dfrac{1 - 2\ln(1) + 1^3}{1^3} = 2$ et $f(1) = \dfrac{\ln(1)}{1^2} + 1 - 1 = 0$, donc $\boxed{T : y = 2(x-1)}$.

5°) Tracé de $\mathcal{C}$, T, et $\mathcal{D}$:



Partie 2 : Travail sur une aire

6°) Nous avons vu que sur $[1,+\infty[$ (et donc sur $[1,\lambda]$), $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$, donc l'aire demandée est égale à $\mathcal{A}_1(\lambda)-\mathcal{A}_2(\lambda)$, où $\mathcal{A}_1(\lambda)$ l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ entre les points d'abscisses 1 et λ, et $\mathcal{A}_2(\lambda)$ l'aire sous la droite $\mathcal{D}$ entre les points d'abscisses 1 et λ.

Nous savons que $\mathcal{A}_1(\lambda)=\displaystyle\int_1^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$ et que $\mathcal{A}_2(\lambda)=\displaystyle\int_1^{\lambda}(x-1)\,\mathrm{d}x$ d'où, par linéarité de l'intégrale :

$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_1^{\lambda}\left(f(x)-(x-1)\right)\,\mathrm{d}x=\int_1^{\lambda}\frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Posons $u=\ln$ et $v:x\mapsto\dfrac{-1}{x}$; ces fonctions sont dérivables sur $[1,\lambda]$, de dérivées continues, et pour tout $x\in[1,\lambda]$,

$$u'(x)=\frac{1}{x},\qquad v'(x)=\frac{1}{x^2}$$

D'où, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda)&=\left[\ln(x)\frac{-1}{x}\right]_1^{\lambda}-\int_1^{\lambda}\frac{1}{x}\frac{-1}{x}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}+0+\int_1^{\lambda}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}+\left[\frac{-1}{x}\right]_1^{\lambda}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A}(\lambda)=-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}+1}$$

7°) Nous savons que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}=0$ et que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}=0$ par croissances comparées, donc $\boxed{L=\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)=1}$.

8°) Soit $\lambda\geq 1$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda)=\frac{L}{2}&\iff-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}+1=\frac{1}{2}\\&\iff\frac{1}{2}=\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\\&\iff\lambda=2\ln(\lambda)+2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A}(\lambda)=\frac{L}{2}\iff 2\ln(\lambda)-\lambda+2=0\ :\ (*)}$$

9°) Posons, pour tout $x\in[1,+\infty[$, $h(x)=2\ln(x)-x+2$.
On a donc $(*)\iff h(\lambda)=0$.
Par somme, la fonction h est dérivable sur $[1,+\infty[$, et pour tout $x\in[1,+\infty[$,

$$h'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$$

Pour $x\in[1,+\infty[$, $x>0$ donc $h'(x)$ est du signe de $2-x$. On en tire le tableau de variation suivant :

x	1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	1	$\nearrow$	$h(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi, h est croissante sur $[1,2]$, donc pour tout $x \in [1,2]$, $h(x) \geq h(1) = 1$. On en tire que l'équation $(*)$ n'a pas de solution sur $[1,2]$, et que $h(2) > 0$.

Par ailleurs, h est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$; de plus, $[2,+\infty[$ est un intervalle, et h y est continue. D'après le théorème de la bijection, h réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur $h\left([2,+\infty[\right) =]-\infty, h(2)]$.

Comme $h(2) > 0$, on a donc $0 \in]-\infty, h(2)]$. Donc 0 a un unique antécédent par h sur $[2,+\infty[$. Autrement dit, il existe un unique réel $x \in [2,+\infty[$ tel que $h(x) = 0$.

Comme il n'y a pas de solution sur $[1,2]$, $\boxed{\text{l'équation } (*) \text{ admet une unique solution } \lambda \text{ dans } [1,+\infty[}$.

Calculons : $h(4) = 2\ln(4) - 2 = 2\left(\ln(4) - 1\right)$. Or $4 > 3 > e$, donc $\ln(4) > 1$, donc $h(4) > 0$.

Si on avait $\lambda \leq 4$, comme λ et 4 sont dans $[2,+\infty[$ où h est décroissante, on aurait $h(\lambda) \leq h(4)$ i.e. $0 \leq h(4)$. Ce n'est pas le cas, donc on a bien $\boxed{\lambda > 4}$.