Devoir maison 1.

À rendre le jeudi 12 septembre 2024

CONSIGNES POUR LES DM

- ★ Ne pas commencer le DM la veille du jour où vous devez le rendre. Anticipez !

  Travailler sérieusement les DM est indispensable pour progresser. Il faut vous mettre au travail sur le DM dès que je vous le donne. Le but n'est pas de le faire d'un seul coup mais d'étaler le travail pour avoir un temps de réflexion suffisant.
- ★ Il faut s'entraîner à chercher seul. C'est normal de ne pas trouver du premier coup et c'est en "séchant" sur les problèmes qu'on arrive, petit à petit, à progresser (d'où encore l'intérêt de s'y prendre suffisamment à l'avance).

  Si vous n'arrivez pas à vous débloquer, vous pouvez me poser des questions et vous pouvez aussi en discuter avec vos camarades. La phase de rédaction doit en revanche être complètement personnelle. Cela n'a aucun intérêt de recopier le DM du voisin.
- ★ La copie que vous rendez doit être écrite lisiblement, avec soin, sans ratures. Les résultats doivent être encadrés. Si ceci n'est pas respecté, je ne corrigerai pas votre copie.

  Utilisez des copies doubles que ce soit en DM ou en DS et évitez les encres pâles.
- ★ Aucun retard dans le rendu des DM ne sera accepté.

Exercice

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\ln x}{x^2} + x - 1. \end{array}$$

On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé direct.

Partie 1 : Étude de f

1°) a) Étudier le sens de variations de la fonction $g : x \mapsto x^3 - 2\ln x + 1$.

b) En déduire que, pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$.

2°) Dresser le tableau de variations de f. On indiquera les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

3°) Justifier que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe de $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
Étudier la position de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{C}$.

4°) Écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

5°) Tracer sur un même graphique $\mathcal{C}$, T, $\mathcal{D}$.

Partie 2 : Travail sur une aire

6°) Soit $\lambda \geq 1$. On appelle $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.
Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$.
Indication : On pourra utiliser une intégration par parties.

7°) Déterminer la limite L de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

8°) Montrer que, pour $\lambda \geq 1$, l'équation $\mathcal{A}(\lambda) = \dfrac{L}{2}$ est équivalente à l'équation $(*)$ suivante :

$$(*) \ : \ 2\ln(\lambda) - \lambda + 2 = 0.$$

9°) Prouver que l'équation $(*)$ admet une unique solution λ dans $[1, +\infty[$.
Vérifier que $\lambda > 4$.